NOMBRE ____

1) ¿Es el vector $\vec{c}$ = (4, 1) combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ = (–3, 1) y $\vec{b}$ = (2, 4)? *(1,5 puntos)*
2) Dados los vectores $\vec{a}$ = (–3, 1) y $\vec{b}$ = (2, 4), se pide:
   a) Calcular las coordenadas de: $-2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ y de $-2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ *(1 punto)*
   b) Dibujar los vectores $-2\vec{a}$ y $\frac{1}{2}\vec{b}$ con origen común en un sistema de referencia. Sumarlos y restarlos gráficamente. *(1 punto)*
3) Dar las coordenadas del vector que va desde $A(1, -2)$ hasta $B(3, 4)$. *(1 punto)*
4) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(3, 4)$. *(1 punto)*
5) Hallar la ecuación de la recta paralela a $y = \frac{2x+1}{3}$ que pasa por el punto (1, –2). *(1 punto)*
6) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y = \frac{2x+1}{3}$ que pasa por el punto (1, –2). *(1 punto)*
7) Dibujar la siguiente función, calculando *eje*, *vértice* y *cortes con los ejes* de la parábola que constituye un trozo de la misma: *(1,5 puntos)*

$$f(x)=\begin{cases} -x-3 & si \quad x<0 \\ -x^2+4x-3 & si \quad x>0 \end{cases}$$

8) Para la función anterior, a la vista de la gráfica, estudiar su dominio, continuidad, monotonía y curvatura. *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) ¿Es el vector $\vec{c}$ = (4, 1) combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ = (–3, 1) y $\vec{b}$ = (2, 4)? *(1,5 puntos)*

Se trata de averiguar los *coeficientes* de la combinación lineal, si es que es posible encontrarlos (puede que no existan):

$$x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c} \iff x(-3,1)+y(2,4)=(4,1) \iff (-3x,x)+(2y,4y)=(4,1) \iff$$
$$\iff (-3x+2y,\ x+4y)=(4,1)$$

Esto último es la igualdad entre dos vectores, puesto que cada miembro de la igualdad contiene las coordenadas de dichos vectores respecto de la base con la que estamos trabajando. Y como los dos vectores son el mismo (por eso hay un signo = entre ellos) y las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas, se tiene:

$$\left.\begin{array}{r}-3x+2y=4\\ x+4y=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}-3x+2y=4\\ 3x+12y=3\end{array}\right\}$$
$$14y=7 \quad \Rightarrow y=7/14=1/2$$

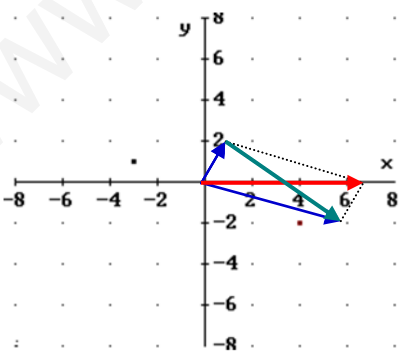
Sustituyendo en la segunda ecuación: $x + 4\cdot(1/2) = 1 \Rightarrow x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$.
Por tanto, hemos encontrado los coeficientes de la combinación lineal. Si el sistema de ecuaciones que hemos resuelto no hubiese tenido solución, $\vec{c}$ no sería combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Pero hemos encontrado que sí es combinación lineal, de coeficientes –1 y 1/2.

2) Dados los vectores $\vec{a}$ = (–3, 1) y $\vec{b}$ = (2, 4), se pide:

a) Calcular las coordenadas de: $-2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ y de $-2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ *(1 punto)*

$$-2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=-2(-3,1)+\frac{1}{2}(2,4)=(6,-2)+(1,2)=\boxed{(7,0)}$$
$$-2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}=-2(-3,1)-\frac{1}{2}(2,4)=(6,-2)-(1,2)=\boxed{(5,-4)}$$

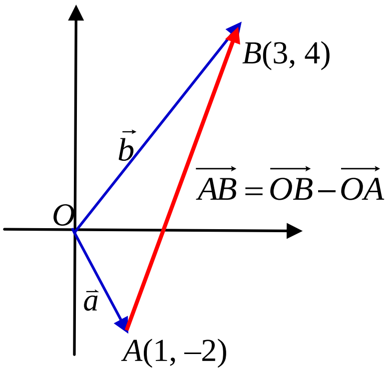
b) Dibujar los vectores $-2\vec{a}$ y $\frac{1}{2}\vec{b}$ con origen común en un sistema de referencia. Sumarlos y restarlos gráficamente. *(1 punto)*



Llevamos a un sistema de referencia los vectores $-2\vec{a}$ y $\frac{1}{2}\vec{b}$, en azul ($-2\vec{a}$ es el que apunta hacia abajo). La suma es el vector rojo, obtenida por la *regla del paralelogramo*. Y la diferencia es el vector verde, que va desde el extremo del segundo vector al extremo del primer vector de la resta.

3) Dar las coordenadas del vector que va desde $A(1, -2)$ hasta $B(3, 4)$. *(1 punto)*

Si dibujamos los *vectores de posición* $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ y $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ de los puntos, veremos que el vector que une sus extremos $\overrightarrow{AB}$ es $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. Por tanto:



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} = (3, 4) - (1, -2) = \boxed{(2, 6)}$

(Se puede recordar pensando en que, una vez colocados los vectores a restar con origen común, el *vector diferencia* es *extremo menos origen*, siendo el *extremo* el vector que va desde el origen común hasta el *extremo* del vector diferencia y el *origen* el que va desde el origen común hasta el *origen* del vector diferencia).

4) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(3, 4)$. *(1 punto)*
La ecuación del la recta en *forma continua* nos proporciona un método fácil para resolver el problema. Siendo los puntos conocidos (x_0, y_0) y (x_1, y_1):

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \Rightarrow \frac{x-1}{3-1} = \frac{y+2}{4+2} \Rightarrow 6(x-1) = 2(y+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x - 6 = 2y + 4 \Rightarrow 6x - 6 - 4 = 2y \Rightarrow y = \frac{6x - 10}{2} \Rightarrow \boxed{y = 3x - 5}$$

5) Hallar la ecuación de la recta paralela a $y = \dfrac{2x+1}{3}$ que pasa por el punto $(1, -2)$.
(1 punto)

Como la recta dada se puede escribir como $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$, su pendiente es $m = \dfrac{2}{3}$.
Dos rectas son paralelas si, y sólo si tienen la misma pendiente. Luego de la recta que nos piden sabemos que debe tener como pendiente la antes indicada y que debe pasar por el punto que nos proporcionan en el enunciado. Usando la ecuación en *forma punto-pendiente*:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - 2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}}$$

6) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y = \dfrac{2x+1}{3}$ que pasa por el punto $(1, -2)$. *(1 punto)*

Si la pendiente de la recta dada es $m = \dfrac{2}{3}$, la de una perpendicular será $m' = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{2/3} = -\dfrac{3}{2}$. Usando, nuevamente, *punto-pendiente*:

$$y + 2 = -\frac{3}{2}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - 2 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}$$

7) Dibujar la siguiente función, calculando *eje, vértice* y *cortes con los ejes* de la parábola que constituye un trozo de la misma: *(1,5 puntos)*

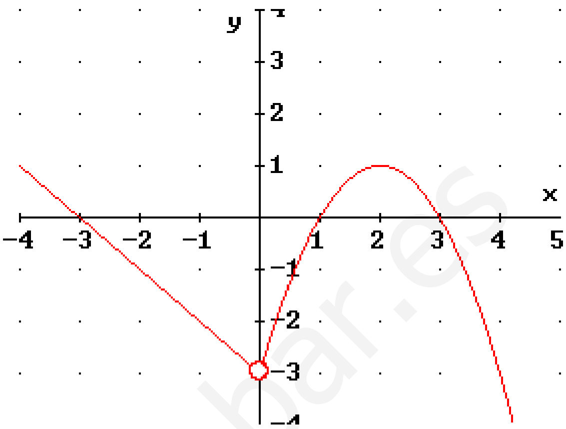
$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & si \quad x < 0 \\ -x^2 + 4x - 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

La función $y = -x - 3$ es una recta. Con una pequeña tabla de valores la dibujamos. Y la restringimos a la zona $x < 0$ (lado izquierdo del eje OY, sin tocarlo).

La función $y = -x^2 + 4x - 3$ es una parábola *cóncava*, puesto que el coeficiente de x^2 es negativo. Además:

- $x = 0 \Rightarrow y = -3$. Corta a OY en (0, –3).
- $y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ó $x = 3$. Corta a OX en (1, 0) y (3, 0).
- Eje: $x = -b / 2a \Rightarrow x = \frac{-4}{-2} \Rightarrow$ $x = 2$.
- Vértice: $x = 2 \Rightarrow y = -4 + 8 - 3 = 1$: (2, 1).

Con una pequeña tabla de valores adicional, obtenemos su gráfica, que restringimos a la zona $x > 0$, esto es, al lado derecho del eje OY sin tocarlo. Obtenemos así la función del gráfico adjunto. Observar que para $x = 0$ no hay imagen, lo que hemos destacado con un punto hueco.



8) Para la función anterior, a la vista de la gráfica, estudiar su dominio, continuidad, monotonía y curvatura. *(1 punto)*

- Dominio: R – {0} = (–∞, 0) ∪(0, +∞), puesto que $x = 0$ no tiene imagen.
- Continuidad: Coincide con el dominio, porque $x = 0$ no tiene imagen.
- Monotonía: Decreciente en (–∞, 0) ∪ (2, +∞). Creciente en (0, 2).
- Curvatura: Cóncava en (0, +∞). Cuando es una recta no es ni cóncava ni convexa.