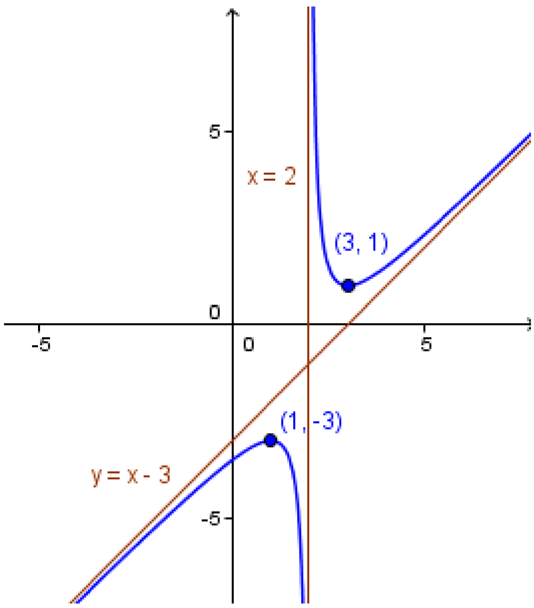
NOMBRE: ____

1) Dados los vectores $\vec{a} = (1, -4/3)$ y $\vec{b} = (1, 1/5)$, se pide:
   a) Hallar $\vec{u} = -3\vec{a}$ y $\vec{v} = 5\vec{b}$. *(0,1 puntos)*
   b) ¿Constituyen una base $\vec{u}$ y $\vec{v}$? *(0,3 puntos)*
   c) Dibujar con origen en un sistema de referencia los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. A continuación, dibujar los vectores $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{d} = \vec{u} + \vec{v}$. *(0,3 puntos)*
   d) Hallar la combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con coeficientes –3 y 5. *(0,1 puntos)*
   e) Calcular las coordenadas de $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$. *(0,1 puntos)*
   f) ¿Cuáles son las coordenadas del vector de posición del punto (2, 5)? *(0,1 puntos)*
   g) Calcular el módulo del vector del apartado anterior. *(0,5 puntos)*
2) Dados los puntos $A(1, 2)$ $B(-3, 4)$ y $C(5, 1)$:
   a) Hallar las coordenadas del punto medio del segmento que une B y C. *(0,5 puntos)*
   b) Hallar el simétrico de B respecto de C. *(0,5 puntos)*
   c) Hallar el vector que va desde B hasta C. *(0,5 puntos)*
   d) ¿Están alineados A, B y C? *(0,5 puntos)*
3) Hallar la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(-3, 4)$. *(1 punto)*
4) Hallar la paralela a $y = \dfrac{2x-3}{3}$ que pasa por (1, –2), indicando cuánto valen su pendiente y su ordenada en el origen. *(1 punto)*
5) Hallar las rectas horizontal y vertical que pasan por (1, –2), indicando cuál es cuál. *(1 punto)*

6) Dada la función $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$, se pide:
   a) Calcular su dominio. *(0,5 puntos)*
   b) Calcular sus intersecciones con los ejes de coordenadas. *(0,5 puntos)*
   c) Averiguar si es par, impar o ninguna de las dos cosas. *(0,5 puntos)*
7) Dada la función del gráfico, se pide:
   a) Dominio y recorrido. *(0,5 puntos)*
   b) Asíntotas. *(0,5 puntos)*
   c) Monotonía y extremos relativos. *(0,5 puntos)*
   d) Curvatura y puntos de inflexión. *(0,5 puntos)*



SOLUCIONES

1) Dados los vectores $\vec{a}$ = (1, –4/3) y $\vec{b}$ = (1, 1/5), se pide:

a) Hallar $\vec{u} = -3\vec{a}$ y $\vec{v} = 5\vec{b}$. *(0,1 puntos)*

$\vec{u}$ = –3(1, –4/3) = (–3·1, –3(–4/3)) = $\boxed{(-3,\ 4)}$

$\vec{v}$ = 5(1, 1/5) = (5·1, 5·(1/5)) = $\boxed{(5,\ 1)}$

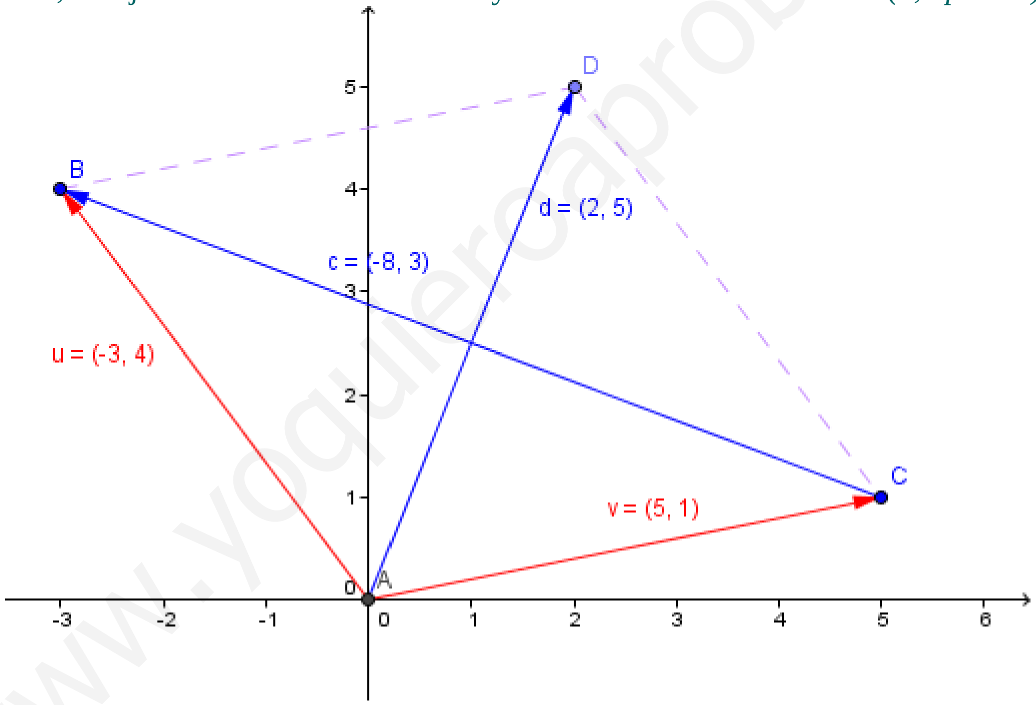
b) ¿Constituyen una base $\vec{u}$ y $\vec{v}$? *(0,3 puntos)*

Veamos si son proporcionales, es decir, si uno es múltiplo del otro. Una forma de hacerlo es dividiendo sus coordenadas para ver si dan el mismo resultado:

$$\frac{-3}{5} \neq \frac{4}{1} \Rightarrow \text{no lo son.}$$

Luego son dos vectores no nulos de distinta dirección. En el plano, <u>constituyen, por tanto, una base</u>.

c) Dibujar con origen en un sistema de referencia los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. A continuación, dibujar los vectores $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{d} = \vec{u} + \vec{v}$. *(0,3 puntos)*



d) Hallar la combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con coeficientes –3 y 5. *(0,1 puntos)*

$\vec{d}$ = –3$\vec{u}$ + 5$\vec{v}$ = –3(–3, 4) + 5(5, 1) = (9, –12) + (25, 5) = $\boxed{(34,\ -7)}$

e) Calcular las coordenadas de $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$. *(0,1 puntos)*

$\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$ = (–3, 4) – (5, 1) = $\boxed{(-8,\ 3)}$

f) ¿Cuáles son las coordenadas del vector de posición del punto (2, 5)? *(0,1 puntos)*

Son las mismas que las del punto: (2, 5).

g) Calcular el módulo del vector del apartado anterior. *(0,5 puntos)*

$$|(2,5)| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \boxed{\sqrt{29}}$$

2) Dados los puntos $A(1, 2)$ $B(-3, 4)$ y $C(5, 1)$:

a) Hallar las coordenadas del punto medio del segmento que une B y C. *(0,5 puntos)*

$$M\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{4+1}{2}\right) = \boxed{\left(1, \frac{5}{2}\right)}$$

b) Hallar el simétrico de B respecto de C. *(0,5 puntos)*

Si llamamos $B'(a, b)$ al simétrico buscado, C será el punto medio del segmento que une B con B'. Por tanto:

$$\begin{cases} \dfrac{-3+a}{2} = 5 \Rightarrow -3+a = 10 \Rightarrow a = 13 \\ \dfrac{4+b}{2} = 1 \Rightarrow 4+b = 2 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

Luego el punto que buscamos es $\boxed{B'(13, -2)}$.

c) Hallar el vector que va desde B hasta C. *(0,5 puntos)*

La diferencia de vectores siempre es "*extremo*" – "*origen*":

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (5, 1) - (-3, 4) = \boxed{(8, -3)}$$

d) ¿Están alineados A, B y C? *(0,5 puntos)*

Lo estarán si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales, con lo que tendrán la misma dirección:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-3, 4) - (1, 2) = (-4, 2)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (5, 1) - (1, 2) = (4, -1)$

Serán proporcionales si dividiendo sus coordenadas se obtiene el mismo resultado:

$$\frac{-4}{4} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow \text{no lo son} \Rightarrow \boxed{\text{No están alineados}}.$$

Otra forma de hacerlo sería hallando la ecuación de la recta que pasa por dos de los puntos y comprobando si el tercero verifica dicha ecuación. En caso afirmativo, los tres forman parte de la misma recta y, de lo contrario, no están alineados.

3) Hallar la recta que pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(-3, 4)$. *(1 punto)*

Usamos la *ecuación continua* de la recta:

$$\frac{x-1}{-3-1} = \frac{y-2}{4-2} \Rightarrow \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow -\frac{2}{4}(x-1) = y-2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}$$

4) Hallar la paralela a $y = \dfrac{2x-3}{3}$ que pasa por $(1, -2)$, indicando cuánto valen su pendiente y su ordenada en el origen. *(1 punto)*

Dos rectas son paralelas si, y sólo si tienen la misma pendiente. La de la que nos dan es 2/3. Y nos piden una recta con dicha pendiente y que pase por $(1, -2)$. Usamos, entonces, la *ecuación punto-pendiente*:

$$y-(-2)=\frac{2}{3}(x-1)\ \Rightarrow\ y+2=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}-2\ \Rightarrow\ \boxed{y=\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}}$$

De donde deducimos que:

$\boxed{\begin{array}{l}\textit{Pendiente}:\ m = 2/3. \\ \textit{Ordenada en el origen}:\ n = -8/3.\end{array}}$

5) Hallar las rectas horizontal y vertical que pasan por (1, –2), indicando cuál es cuál. *(1 punto)*

Horizontal: Las rectas horizontales son de la forma y = *número*. Para pasar por el punto (1, –2) debe ser, pues: $\boxed{y=-2}$.
Vertical: Las rectas verticales son de la forma x = *número*. Para pasar por (1, –2) debe ser, pues: $\boxed{x=1}$.

6) Dada la función $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$, se pide:

a) Calcular su dominio. *(0,5 puntos)*
El *dominio* de una función son los valores de x para los cuales existen imagen. La única operación de las que intervienen en nuestra función que puede no dar resultados es la división, cuando se anule el denominador. Y esto ocurre si:

$$x^2-1=0\ \Rightarrow\ x^2=1\ \Rightarrow\ x=\pm 1$$

Luego $\boxed{D(f) = R - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)}$.

b) Calcular sus intersecciones con los ejes de coordenadas. *(0,5 puntos)*

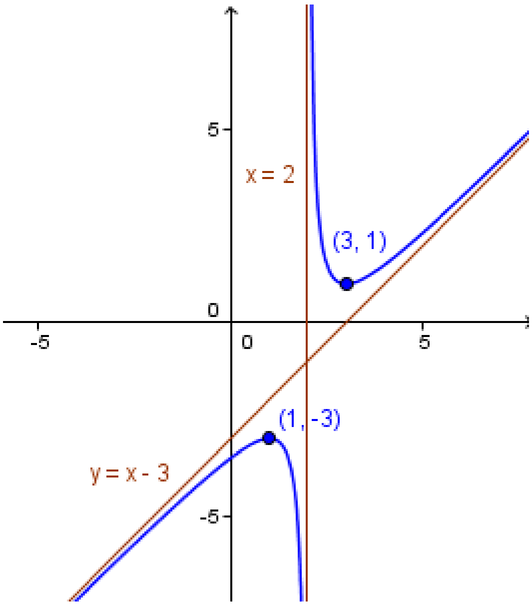
- $x = 0 \Rightarrow y = 0/(0^2-1) = 0/(-1) = 0 \Rightarrow \boxed{(0, 0)}$ es el corte con OY.
- $y = 0 \Rightarrow 0=\dfrac{2x}{x^2-1} \Rightarrow$ Una fracción se anula si lo hace el numerador, excluyendo aquellos valores que también anulen al denominador: $2x = 0 \Rightarrow x = 0$, que no anula el denominador, por lo que es válida. Así, el corte con OX es el mismo punto anterior: $\boxed{(0, 0)}$.

c) Averiguar si es par, impar o ninguna de las dos cosas. *(0,5 puntos)*

$$f(-x)=\frac{2(-x)}{(-x)^2-1}=\frac{-2x}{x^2-1}=-\frac{2x}{x^2-1}=-f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Es impar}}.$$

7) Dada la función del gráfico, se pide:



a) Dominio y recorrido. *(0,5 puntos)*
Según el gráfico, y dado que no hay imagen para $x = 2$, ni los valores de y entre $y = -3$ e $y = 1$ corresponden a ningún valor de x, tenemos que:

$$\boxed{D(f) = R - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)}$$
$$\boxed{Im(f) = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)}$$

b) Asíntotas. *(0,5 puntos)*

$\boxed{\textit{Vertical}:\ x = 2.}$

$\boxed{\textit{Oblicua}:\ y = x - 3.}$

$\boxed{\text{No tiene } \textit{asíntota horizontal}.}$

c) Monotonía y extremos relativos. *(0,5 puntos)*

	(–∞, 1)	1	(1, 2)	2	(2, 3)	3	(3, +∞)
f	↗ **creciente**	**Máx**	↘ **decreciente**	∄	↘ **creciente**	**mín**	↗ **decreciente**

Máximo relativo: (1, –3).

Mínimo relativo: (3, 1).

d) Curvatura y puntos de inflexión. *(0,5 puntos)*

	(–∞, 2)	2	(2, +∞)
f	∩ **cóncava**	∄	∪ **convexa**

No tiene puntos de inflexión.