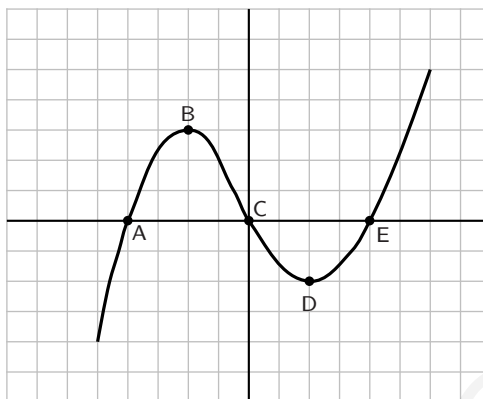


Transformaciones geométricas en las funciones

1

Dada la gráfica de la función $y = f(x)$:



Representa a partir de ella las siguientes funciones, escribiendo en cada caso las coordenadas de los puntos A , B , C , D y E :

- a) $y = |f(x)|$ b) $y = f(x - 1)$ c) $y = f(x) + 2$ d) $y = f(-x)$ e) $y = -f(x)$

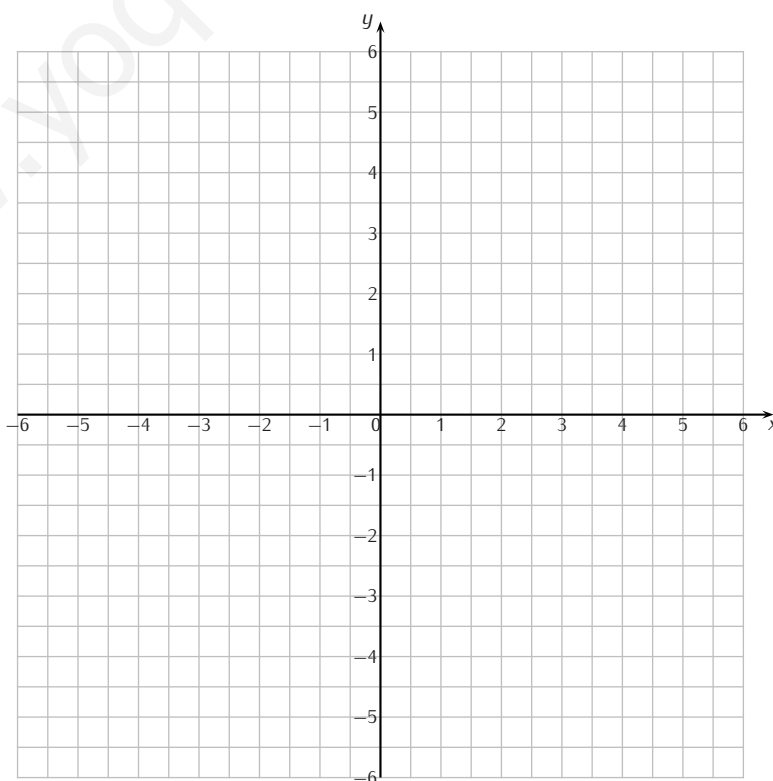
2

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = |x|$, representa gráficamente las funciones $y = f(g(x))$ e $y = g(f(x))$.

3

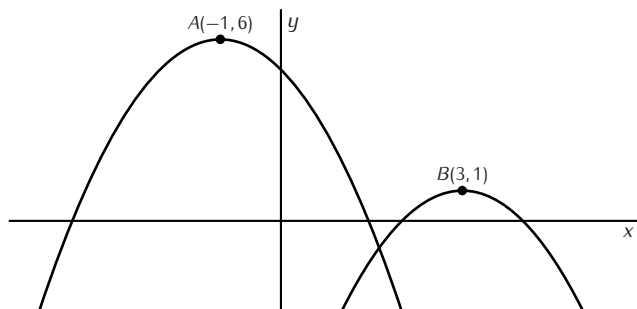
Sea $f(x) = 2x + 1$.

- a) Dibuje la gráfica de $f(x)$ para $0 \leq x \leq 2$ en la cuadrícula inferior.
b) Sea $g(x) = f(x + 3) - 2$. Dibuje, en la misma cuadrícula, la gráfica de $g(x)$ para $-3 \leq x \leq -1$.



4

En la siguiente figura, si la parábola con vértice A tiene por ecuación $y = f(x)$, ¿cuál será la ecuación de la parábola con vértice B ?



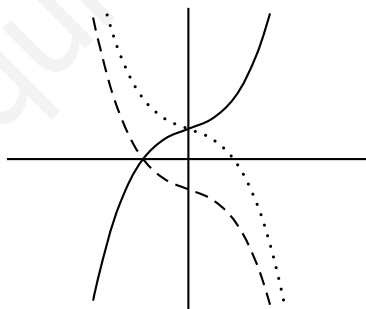
5

La gráfica de la función $y = x^2$ se convierte en la de $y = 5 - 3(x - 4)^2$ mediante cuatro transformaciones. Escribe la ecuación de la función tras cada transformación, especificando cuáles son los valores de k , p y q :

- una simetría respecto de la recta $y = 0$.
- un estiramiento vertical con factor de escala k .
- una traslación horizontal de p unidades.
- una traslación vertical de q unidades.

6

La siguiente figura muestra la gráfica de la función $y = x^3 + x + 2$ (en trazo continuo), y la gráfica de otras dos funciones (una en línea discontinua y otra punteada). Escribe la expresión algebraica de estas dos funciones.



7

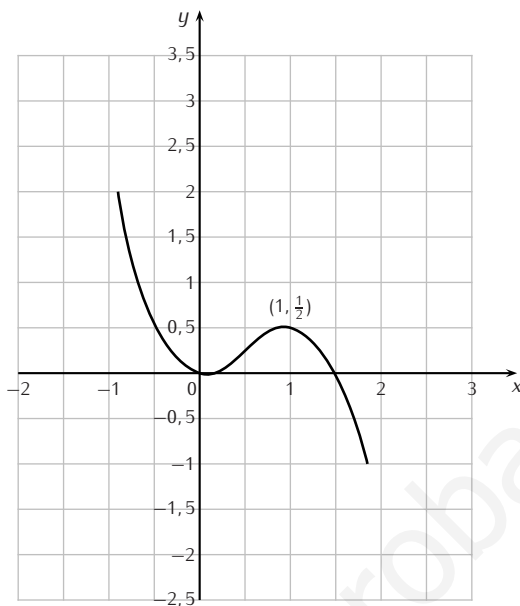
Dada la función $y = 2x^2 - 12x + 23$:

- Exprésela en la forma $y = 2(x - c)^2 + d$.
- La gráfica de $y = x^2$ se transforma en la gráfica de $y = 2x^2 - 12x + 23$ mediante las transformaciones:
 - un estiramiento vertical de razón k seguido de
 - una traslación horizontal de p unidades seguida de
 - una traslación vertical de q unidades.

Escriba el valor de k , p y q .

8

El siguiente diagrama muestra la gráfica de $y = f(x)$. Tiene un punto mínimo y un punto máximo en $(0, 0)$ y $(1, \frac{1}{2})$.



- a) Sobre la misma figura dibuje la gráfica de $y = f(x - 1) + \frac{3}{2}$.
- b) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos mínimo y máximo de $y = f(x - 1) + \frac{3}{2}$?

9

Sea $f(x) = 3(x + 1)^2 - 12$.

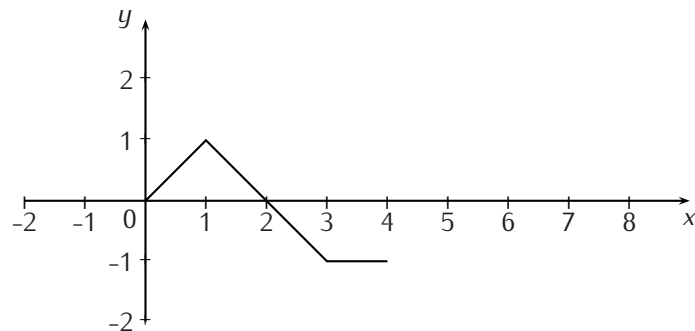


- a) Muestre que $f(x) = 3x^2 + 6x - 9$.
- b) Respecto al gráfico de f :
- escriba las coordenadas del vértice;
 - escriba el punto de corte con el eje y ;
 - halle los puntos de corte con el eje x .
- c) **A partir de lo anterior** dibuje aproximadamente el gráfico de f .
- d) Sea $g(x) = x^2$. El gráfico de f se puede obtener a partir del gráfico de g mediante las dos transformaciones siguientes:
- un estiramiento de razón t en la dirección del eje y ,
 - seguido de una traslación mediante $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

Escriba $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ y el valor de t .

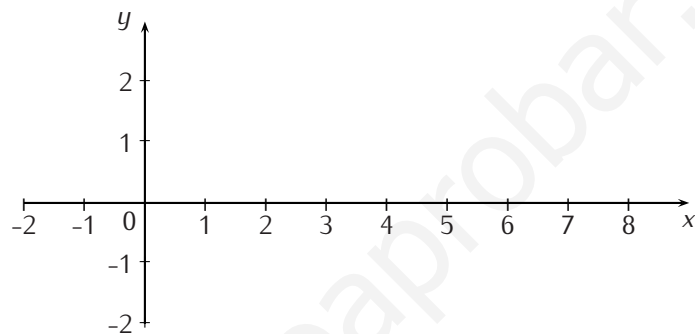
10

La siguiente figura muestra la gráfica de $y = f(x)$.

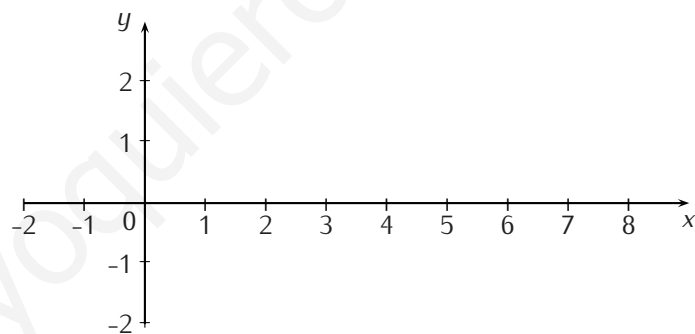


a) Dibuje sobre los siguientes ejes cada una de las gráficas pedidas.

i) $y = 2f(x)$;



ii) $y = f(x - 3)$.



b) El punto $A(3, -1)$ pertenece a la gráfica de f . El punto A' es el punto correspondiente sobre la gráfica de $y = -f(x) + 1$. Halle las coordenadas de A' .

11

Sea $f(x) = 3x^2 - 6x + p$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene dos raíces iguales.

a) i) Escriba el **valor** del discriminante.

ii) A partir de lo anterior, muestre que $p = 3$.

b) El vértice del gráfico de f está situado sobre el eje x . Halle las coordenadas del vértice.

c) Escriba la solución de $f(x) = 0$.

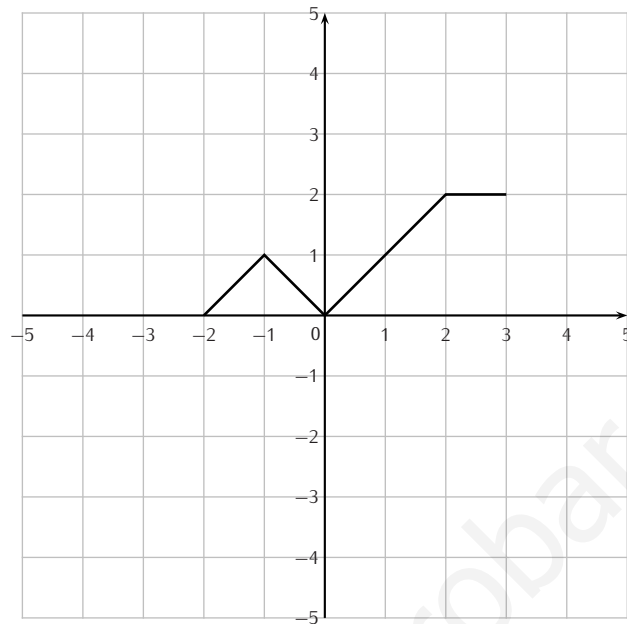
d) La función se puede escribir en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Escriba el valor de a , h y k .

e) El gráfico de la función g se obtiene a partir del gráfico de f mediante una simetría de f respecto al eje x , seguida de una traslación por el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. Halle g , de la forma $g(x) = Ax^2 + Bx + C$.

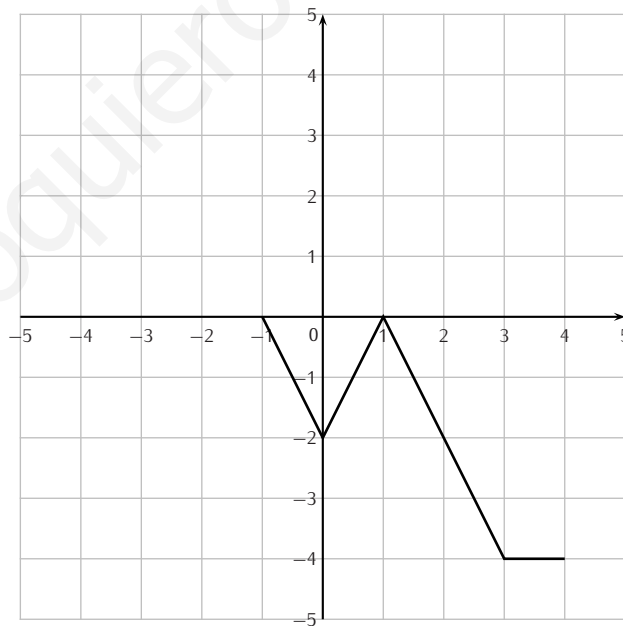




La figura que aparece a continuación muestra la gráfica de una función $f(x)$, para $-2 \leq x \leq 3$.



- a) Dibuje aproximadamente la gráfica de $f(-x)$.
- b) La gráfica de f se transforma de modo tal que se obtiene la gráfica de g . A continuación se muestra la gráfica de g .

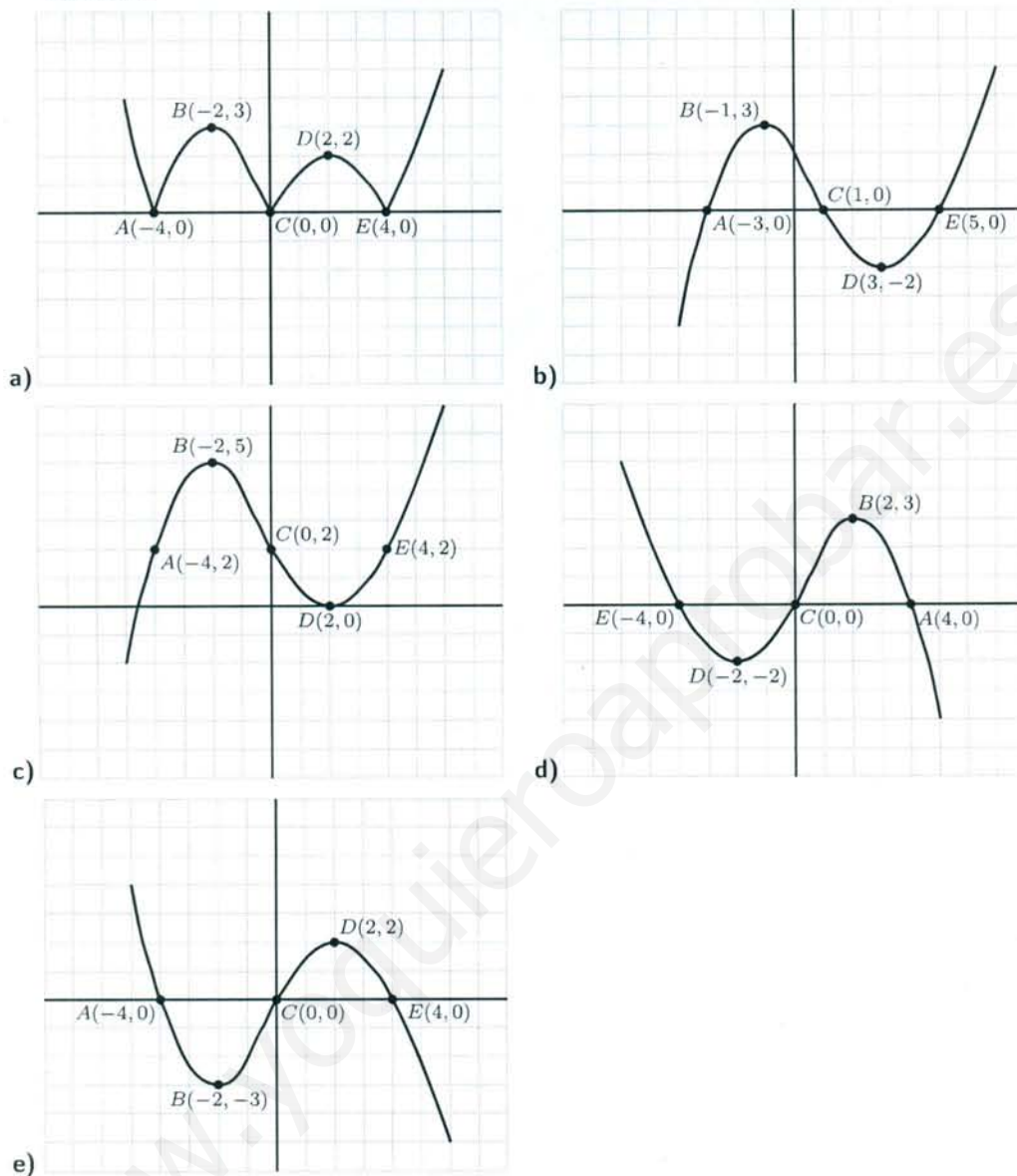


La función g se puede escribir en la forma $g(x) = af(x+b)$. Escriba el valor de a y el de b .

FUNCIONES: TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS. SOLUCIONES (hoja 11)

1.

Solución:

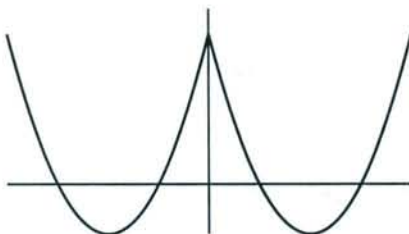


2.

Solución:

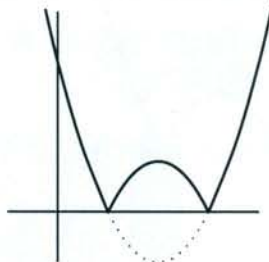
- $y = f(g(x)) = f(|x|) = |x|^2 + 4|x| + 3$

Para dibujar $f(|x|)$ basta trazar la función $f(x)$ para valores positivos de la variable x , y realizar la simétrica respecto del eje OY :



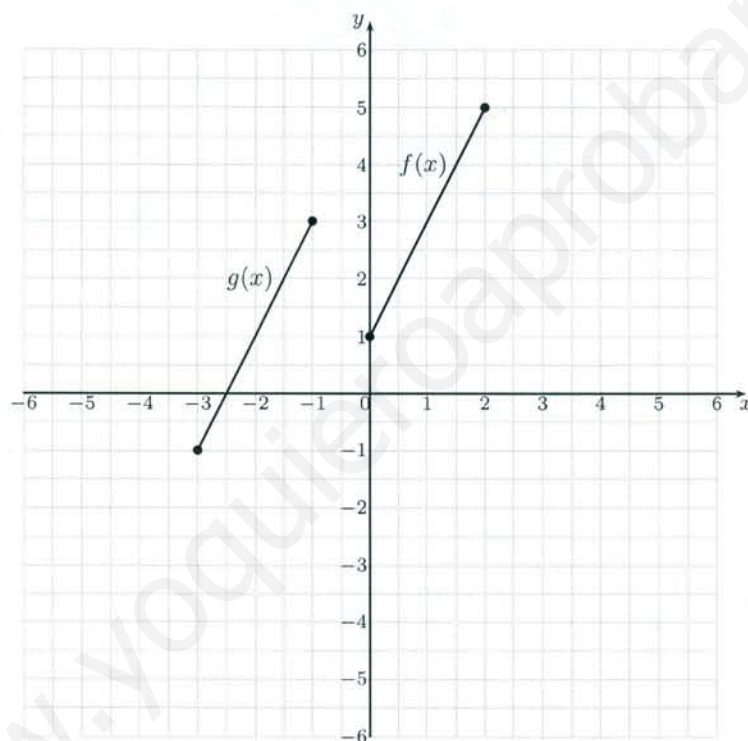
- $y = g(f(x)) = g(x^2 - 4x + 3) = |x^2 - 4x + 3|$

Para representar el valor absoluto de una función, primero se representa sin valor absoluto, y aquellos trozos situados por debajo del eje OX los situamos por encima, de forma simétrica:



3.

Solución:



4.

Solución:

$$y = f(x - 4) - 5$$

5.

Solución:

- $y = x^2 \rightarrow y = -x^2$
- $y = -x^2 \rightarrow y = -3x^2 \quad (k = 3)$
- $y = -3x^2 \rightarrow y = -3(x - 4)^2 \quad (p = 4)$
- $y = -3(x - 4)^2 \rightarrow y = 5 - 3(x - 4)^2 \quad (q = 5)$

6.

Solución:

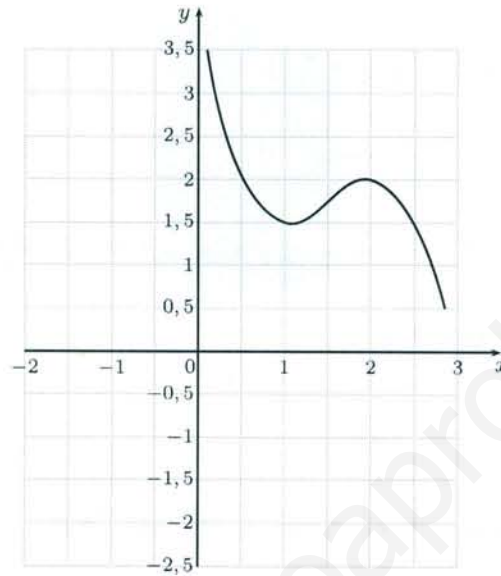
- Línea punteada: simétrica respecto del eje OY .
 $y = f(-x) = (-x)^3 + (-x) + 2 = -x^3 - x + 2$

- Línea discontinua: simétrica respecto del eje OX .
 $y = -f(x) = -(x^3 + x + 2) = -x^3 - x - 2$

8.

Solución:

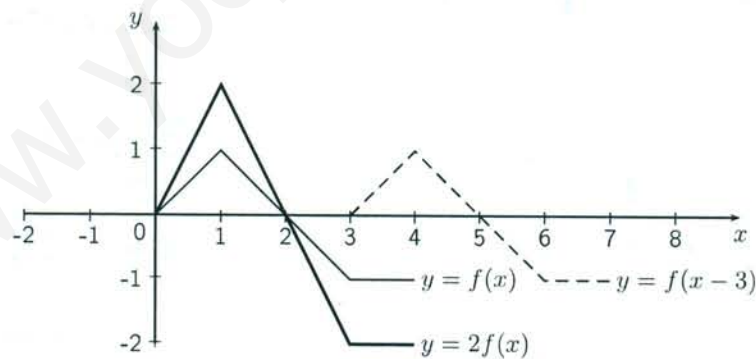
a)

b) Mínimo: $(1, \frac{3}{2})$ Máximo: $(2, 2)$

10.

Solución:

a)



- b) $-f(x)$ es simétrica de $f(x)$ respecto del eje OX : el punto $(3, -1)$ se transforma en $(3, 1)$.
 $-f(x) + 1$: traslación vertical de 1 unidad, luego el punto $(3, 1)$ se transforma en $(3, 2)$.
 Por tanto, $A'(3, 2)$.
 O también: $f(3) = -1$; $-f(3) + 1 = -(-1) + 1 = 2$; $A'(3, 2)$

$$\textcircled{7} \text{ a) } y = 2x^2 - 12x + 23 = 2\left(x^2 - 6x + \frac{23}{2}\right) = 2\left(x^2 - 6x + 9 - 9 + \frac{23}{2}\right) =$$

$$= 2\left[(x-3)^2 + \frac{5}{2}\right] = 2(x-3)^2 + 5$$

$$\text{b) } y = x^2$$

$$\cdot y = 2x^2 \quad (K=2)$$

$$\cdot y = 2(x-3)^2 \quad (p=3)$$

$$\cdot y = 2(x-3)^2 + 5 \quad (q=5)$$

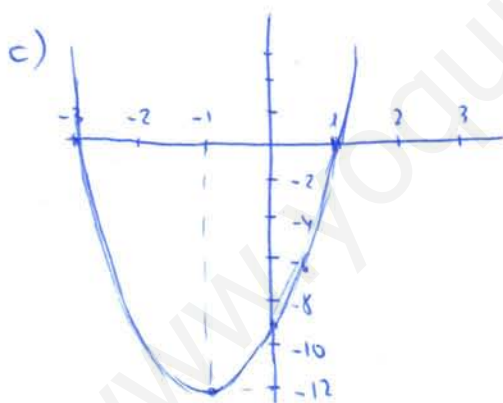
$$\textcircled{9} \text{ a) } f(x) = 3(x+1)^2 - 12 = 3(x^2 + 2x + 1) - 12 = 3x^2 + 6x + 3 - 12 =$$

$$= 3x^2 + 6x - 9$$

$$\text{b) i) } V(-1, -12)$$

$$\text{ii) eje } Oy : (0, -9)$$

$$\text{iii) } 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -3 \Rightarrow (-3, 0) \\ 1 \Rightarrow (1, 0) \end{cases}$$



$$\text{d) } g(x) = x^2$$

$$3 \cdot g(x) = 3x^2 \Rightarrow \boxed{t=3}$$

$$3g(x+1) - 12 = 3(x+1)^2 - 12 = f(x)$$

$$\text{luego } \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{11} \text{ a) } f(x) = 3x^2 - 6x + p = 0$$

$$\text{i) } \Delta = 36 - 4 \cdot 3 \cdot p = 36 - 12p \quad ; \quad \text{ii) } \Delta = 0 \Rightarrow 36 - 12p = 0 \Rightarrow p = 3$$

$$\text{b) } f(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \Rightarrow V(1, 0)$$

$$\text{c) } f(x) = 0 \Rightarrow 3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

(3)

d) $f(x) = 3(x-1)^2 \rightarrow a=3; h=1; k=0$.

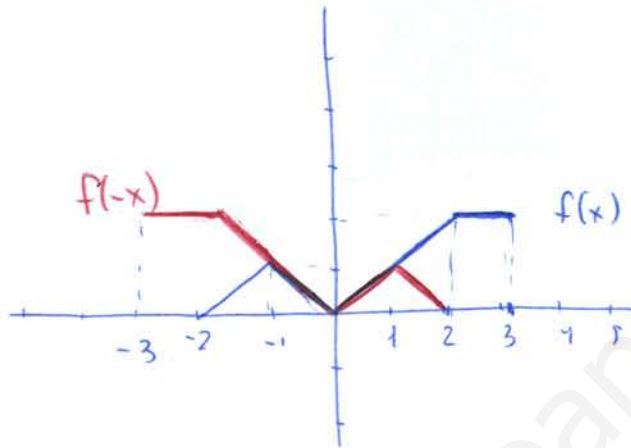
e) • Simetría respecto al eje OX : $-f(x) = -3x^2 + 6x - 3$

• Traslación según $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$: $g(x) = -3x^2 + 6x - 3 + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = -3x^2 + 6x + 3$

_____ o _____

(12) a)



b) $f(x) \xrightarrow[\text{resp. } OX]{\text{simetría}} -f(x) \xrightarrow[\text{vertical } (\times 2)]{\text{estiramiento}} -2f(x) \xrightarrow[\text{según } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]{\text{traslación horizontal}}$

$\rightarrow -2f(x-1) + 0 = -2f(x-1) \rightarrow a = -2$
 $\rightarrow b = -1$

_____ o _____