Julio 2023 (Extraordinario)
Opción A

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Determine A^3 y A^{2023}.

b) (1 punto) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{2023} = A^{3\cdot 674+1} = (A^3)^{674} \cdot A = I^{674} \cdot A = I \cdot A = A$$

b) $$|A| = 1 \xrightarrow{\exists\ A^{-1}} \text{Adj}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podríamos haber razonado diciendo que $A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = I \implies \boxed{A^{-1} = A^2}$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = x^3 + 2x^2$$

a) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si son máximos o mínimos.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $x_0 = 1 \implies y_0 = f(x_0) = f(1) = 3$

$\implies (x_0, y_0) = (1, 3)$

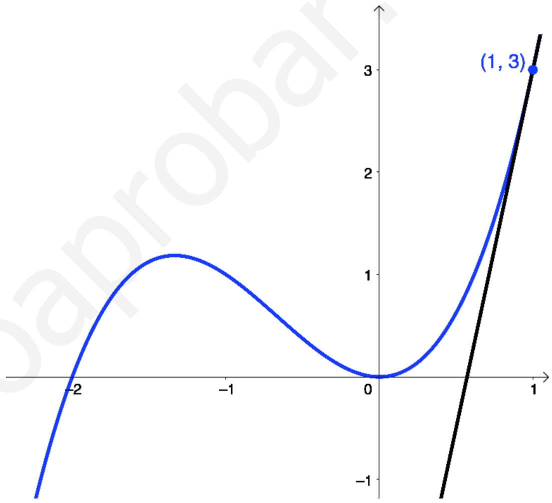
$f'(x) = 3x^2 + 4x$

$m_r = f'(x_0) = f'(1) = 7$

$r \equiv y - y_0 = m_r \cdot (x - x_0)$

$y - 3 = 7 \cdot (x - 1)$

$r \equiv y = 7x - 4$



b) $f'(x) = 3x^2 + 4x = 3x \cdot \left(x + \dfrac{4}{3}\right) = 0 \implies x = \{0, -4/3\}$

$$f''(x) = 6x + 4 \implies \begin{cases} f''(0) = 4 > 0 \xRightarrow{(\cup)} \text{Mínimo en } (0,0) \\ f''(-4/3) = -4 < 4/3 \xRightarrow{(\cap)} \text{Máximo en } (-4/3, 32/27) \end{cases}$$

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & , \text{ si } x < 2 \\ e^x & , \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) *(1 punto) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.*

b) *(1 punto) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

- `Continuidad en` $x = 2$:
  - $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(ax^2+3) = 4a+3$
  - $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} e^x = e^2$
  - $f(2) = e^2$

$$f(x) \text{ es continua en } x = 2 \iff \lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \xrightarrow{4a+3=e^2} \boxed{a = \frac{e^2-3}{4}}$$

b) Entre las rectas $x = 2$ y $x = 3$ la función $f(x) = e^x = 0 \implies \nexists$ Sol., lo que define un único recinto de integración $A_1 : (2, 3)$

$$A_1 = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 e^x\,dx = e^x\Big]_2^3 = e^3 - e^2$$
$$Area = |A_1| = e^3 - e^2 \simeq 12.696\ u^2$$

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27.4 % de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos 150 minutos, y que el 65.1 % consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Además, el 76.3 % de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:

a) (1 punto) Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

b) (1 punto) No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

Sean los sucesos:

$A \equiv$ "La mujer practica actividad física al menos 150 minutos semanales"
$F \equiv$ "La mujer consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día"

Del enunciado tenemos:

$$P(A) = 0.274 \quad \& \quad P(F) = 0.651 \quad \& \quad P(A \cup F) = 0.763$$

a) $P(A \cap F) = P(A) + P(F) - P(A \cup F) = 0.274 + 0.651 - 0.763 = 0.162$

b) $P(\overline{A} \mid \overline{F}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{P(\overline{A \cup F})}{1 - P(F)} = \dfrac{1 - P(A \cup F)}{1 - P(F)} = \dfrac{1 - 0.763}{1 - 0.651} = 0.679$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

Para estimar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.

a) *(1 punto) Sabiendo que la proporción poblacional es $P = 0.55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del 99.01 %, el margen de error en la estimación no supere el 10 %.*

b) *(1 punto) Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.*

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción A)

Solución.

a) $n = ? \quad \& \quad p = 0.55 \Rightarrow q = 0.45 \quad \& \quad E < 0.1 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.9901$

$1-\alpha = 0.9901 \Rightarrow \alpha = 0.0099 \Rightarrow {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.00495 \Rightarrow 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.99505 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.55 \cdot 0.45}{n}} < 0.1 \implies n \geq \left(\frac{2.575}{0.1}\right)^2 \cdot 0.55 \cdot 0.45 = 164.1$$

$$\implies \boxed{n = 165}$$

b) $n = 100 \quad \& \quad \hat{p} = \dfrac{70}{100} = 0.7 \quad \& \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0.3 \quad \& \quad 1-\alpha = 0.95$

$1-\alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.05 \implies {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.025 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_{2} = 0.975 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.96$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.7 \cdot 0.3}{100}} = 0.0898$$

$$I.C._{95\,\%}(p) = (\hat{p} - E; \hat{p} + E) \implies \boxed{I.C._{95\,\%}(p) = (0.6102; 0.7898)}$$

Julio 2023 (Extraordinario)
Opción B

Ejercicio 1 (2 *puntos*)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

Método de Rouché

a) Escribimos el sistema en forma matricial:

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 2 & a & 1 \end{array}\right)$$

Hallamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A| = a^3 - 7a + 6 = a \cdot (a+1) = 0 \implies a = \{-3, 1, 2\}$$

- Si $a \neq \{-3, 1, 2\}$ $\quad |A| \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 3 = \operatorname{ran}(A^*) = \text{nº incóg.} \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Compatible Determinado (Solución única).

- Si $a = -3 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \operatorname{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \implies \operatorname{ran}(A^*) = 3$

  $\operatorname{ran}(A) = 2 \neq \operatorname{ran}(A^*) = 3 \xrightarrow{Rouche}$ Sistema Incompatible ($\nexists$ solución)

- Si $a = 1 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{ran}(A^*) = 2$

$\text{ran}(A) = 2 = \text{ran}(A^*) \neq \text{n}^{\underline{\text{o}}}\ \text{incóg.} = 3 \xRightarrow{\textit{Rouche}}$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (Infinitas soluciones)

- Si $a = 2 \implies A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

  $|A| = 0 \implies \text{ran}(A) < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies \text{ran}(A) = 2$

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{ran}(A^*) = 3$

  $\text{ran}(A) = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \xRightarrow{\textit{Rouche}}$ SISTEMA INCOMPATIBLE ($\nexists$ solución)

b) Resolvemos el sistema para $a = 0$ por el método de Gauss, teniendo en cuenta que estamos ante un S.C.D.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim [F_1 \leftrightarrow F_3] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ F_2 - F_1 \\ \\ \end{array}\right]$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left[\begin{array}{c} \\ \\ 2F_3 + F_2 \end{array}\right] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x + 2 \cdot \frac{2}{3} = 1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow -2y + 2 \cdot \frac{1}{6} = -1 & \Rightarrow \\ \Rightarrow 6z = 1 & \Rightarrow \end{array} \boxed{\begin{array}{c} x = -1/3 \\ y = 2/3 \\ z = 1/6 \end{array}}$$

Ejercicio 2 (2 *puntos*)

Una entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

- `Incógnitas:` $x \equiv$ "Tiempo de entrenamiento de fuerza (min) "
  $y \equiv$ "Tiempo de entrenamiento de cardio (min)"

- `Restricciones:` Escribimos las restricciones y los puntos necesarios para su representación

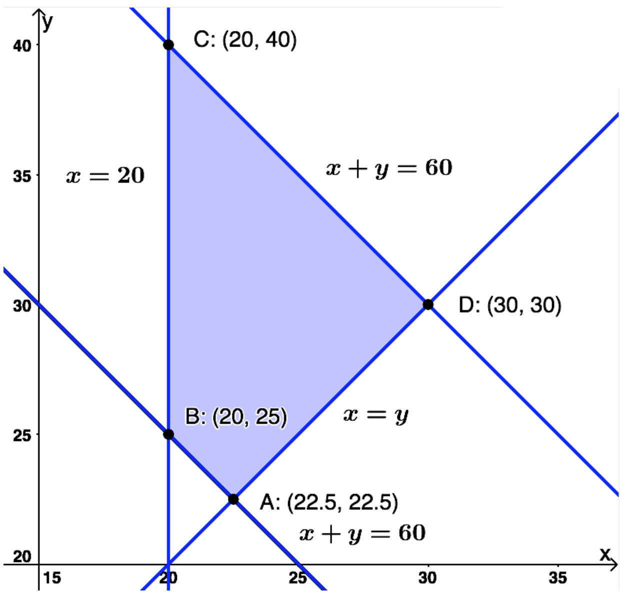
$$\begin{cases} \text{①}\ x+y \geq 45 & \rightarrow (0,45) \quad \& \quad (45,0) \\ \text{②}\ x+y \leq 60 & \rightarrow (0,60) \quad \& \quad (60,0) \\ \text{③}\ x \leq y & \rightarrow (0,0) \quad \& \quad (60,60) \\ \text{④}\ x \geq 20 & \rightarrow (20,0) \\ x, y \geq 0 & \end{cases}$$

- `Función objetivo` $\quad f(x,y) = x + 2y$

- `Región factible` Representamos la región y calculamos los vértices.

- `Optimización de F.O.` Evaluamos $f(x,y)$ en cada vértice

Punto	x	y	$f(x,y)$
A	22.5	22.5	67.5
B	20	25	70
C	20	40	100
D	30	30	90



La rutina *más beneficiosa* se obtiene con 20 minutos de fuerza y 40 de cardio , con una puntuación de 100, mientras que la *menos beneficiosa* se obtiene con 22.5 minutos de fuerza y otros tantos de cardio y da una puntuación de 67.5.

Ejercicio 3 (2 *puntos*)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = x + \frac{2}{x}$$

a) (1 punto) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

$$f(x) = x + \frac{2}{x} = \frac{x^2+2}{x}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

- `A. Vertical:` $\exists\, A.V.$ en $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2}{x} = \left[\frac{2}{0}\right] = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \left[\dfrac{2}{0^-}\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \left[\dfrac{2}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

- `A. Horizontal:` $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+2}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \pm\infty \implies \nexists \underset{x\to\pm\infty}{A.H.}$

- `A. Oblicua:` $\exists \underset{x\to\pm\infty}{A.O}$ en $y = x$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\cancel{x} + \frac{2}{x} - \cancel{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0$$

b) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - (x^2+2)}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{x^2} = 0 \implies x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}$

	$\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$	$\left(-\sqrt{2}, 0\right)$	$\left(0, \sqrt{2}\right)$	$\left(\sqrt{2}, +\infty\right)$
Signo $f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función $f(x)$ es *creciente* en $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ y *decreciente* en $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, +\sqrt{2}\right)$, y tiene un *mínimo relativo* en $x = \sqrt{2}$ y un *máximo relativo* en $x = -\sqrt{2}$.

Ejercicio 4 (2 *puntos*)

La Agencia Estatal de investigación Española convoca regularmente el Progrma Ramón y Cajal *para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria* 2021 *se presentaron* 2159 *solicitudes en la modalidad general y* 1316 *en la modalidad de jóvenes doctores. El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el* 16.1 %*, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del* 21.1 %*. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:*

a) (1 punto) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramón y Cajal.

b) (1 punto) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigador ha sido seleccionado.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B)

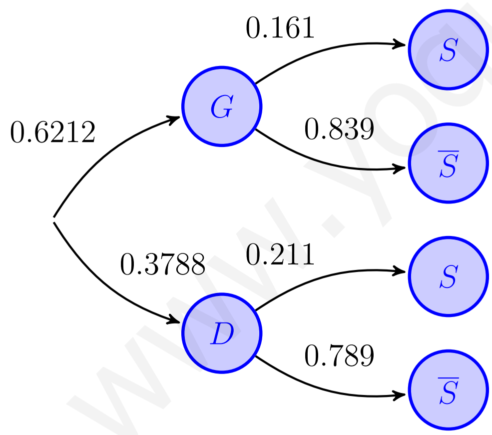
Solución.

Sean los sucesos:

$$\begin{aligned} G &\equiv \text{“El solicitante es de modalidad general”} \\ D &\equiv \text{“El solicitante es jóven doctor”} \\ S &\equiv \text{“El solicitante es seleccionado”} \end{aligned}$$

Del enunciado tenemos:

$$P(G) = \frac{2159}{2159 + 1316} = 0.6212 \quad \& \quad P(S \mid G) = 0.161 \quad \& \quad P(S \mid D) = 0.211$$



a) $$\begin{aligned} P(S) &= P\big((G \cap S) \cup (D \cap S)\big) \\ &= P(G \cap S) + P(D \cap S) \\ &= P(G) \cdot P(S \mid G) + P(D) \cdot P(S \mid D) \\ &= 0.6212 \cdot 0.161 + 0.3788 \cdot 0.211 = 0.1799 \end{aligned}$$

b) $$P(G \mid S) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} = \frac{P(G) \cdot P(S \mid G)}{P(S)} = \frac{0.6212 \cdot 0.161}{0.1799} = 0.5559$$

Ejercicio 5 (2 *puntos*)

La distancia diaria en kilómetros recorrida por un autobús urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 2 kilómetros.

a) (1 punto) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilómetros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99 % para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.

b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilómetro, con un nivel de confianza del 90 %.

(Madrid - Matemáticas CCSS - Julio 2023 - Opción B)

Solución.

$$X \equiv \text{“Distancia recorrida por un autobús (km)”} \longrightarrow X : \mathcal{N}(\mu, 2)$$

a) $X : \mathcal{N}(\mu, 2) \xrightarrow{n=20} \overline{x} = 50 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.99$

$$1 - \alpha = 0.99 \implies \alpha = 0.01 \implies {}^{\alpha}\!/_2 = 0.005 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_2 = 0.995 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 2.575$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = 1.15$$

$$I.C._{99\,\%}(\mu) = (\overline{x} - E; \overline{x} + E) \implies \boxed{I.C._{99\,\%}(\mu) = (48.85; 51.15)}$$

b) $n =? \qquad \& \qquad E < 1 \qquad \& \qquad 1 - \alpha = 0.9$

$$1 - \alpha = 0.9 \implies \alpha = 0.1 \implies {}^{\alpha}\!/_2 = 0.05 \implies 1 - {}^{\alpha}\!/_2 = 0.95 \xrightarrow{Tabla} z_{\alpha/2} = 1.645$$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} < 1 \implies n > \left(1.645 \cdot \frac{2}{1}\right)^2 = 10.82 \implies \boxed{n = 11}$$