Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2022–2023

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES (4)	
	Convocatoria:

Instrucciones: Resolver un máximo de 4 preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1, UNA entre A2 y B2, UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4. Cada pregunta se evaluará entre 0 y 2,5 puntos.

A1. En un taller de electricidad de vehículos se reparan coches (45%), camiones (25%), guaguas (20%) y motos (resto). El 10% de los coches, el 15% de los camiones, el 9% de las guaguas y el 12% de las motos vienen al taller por fallos en el sistema de arranque.

a) Construir un diagrama de árbol que describa lo anterior.

b) Calcular la probabilidad de que se repare en el taller un vehículo que no tenga fallos en el sistema de arranque.

c) Si se ha reparado en el taller un vehículo que presentaba fallos en el sistema de arranque, ¿cuál es la probabilidad de que sea una moto?

B1. La probabilidad de que un ave rapaz, que nace en un zoológico, sobreviva más de 5 años, es del 10%.

a) Si en un zoo tenemos 10 aves rapaces nacidas este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellas sigan vivas dentro de 5 años.

b) Si entre todos los zoológicos del país hay 200 aves rapaces nacidas este mismo año, hallar la probabilidad de que, al cabo de 5 años, hayan sobrevivido más de 10 y menos de 15 de ellas.

c) Se ha hecho un seguimiento de 160 aves rapaces que viven en libertad, observándose que sólo 12 de ellas han sobrevivido más de 5 años. Calcular un intervalo de confianza al 90% para la proporción de aves rapaces en libertad que sobreviven más de 5 años.

A2. Se realiza un estudio para evaluar qué proporción de los pasajeros en las rutas interinsulares viaja con descuento de residente. Para ello se toma una muestra de 300 pasajeros, de los cuales se observa que 225 viajan con este descuento.

a) Determinar un intervalo de confianza, al 96%, para la proporción de pasajeros que viajan con descuento de residente.

b) Usando la proporción de pasajeros con descuento de residencia calculada en esta muestra como estimación de dicha proporción en la población, ¿de qué tamaño debería ser la muestra si se desea construir un intervalo de confianza al 92% para esa proporción con un error máximo de 0.03?

c) Si se pierden los datos de 5 de los pasajeros de la muestra, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos viajara con descuento de residencia.

B2. Un fabricante de televisores afirma que la duración media de su producto es de 10 años. Para verificar esto, se selecciona una muestra aleatoria de 50 televisores y se encuentra que la duración media es de 9.5 años, con una desviación típica de 2 años.

a) Calcular el intervalo de confianza del 88% para la duración media de los televisores del fabricante.

b) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar la duración media de los televisores con un error menor de 6 meses y con un nivel de confianza del 95%?

A3. El beneficio de una empresa, en miles de euros, a lo largo de 50 años viene dado por:

$$B(t)=\begin{cases} -0,04t^2+2,4t & para \quad 0\le t<40 \\ \dfrac{40t-320}{t} & para \quad 40\le t\le 50 \end{cases}$$

siendo t el tiempo transcurrido (en años).

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $B(t)$ a lo largo de los 50 años.

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $B(t)$. ¿Cuál es el beneficio máximo y cuándo se produjo?

c) Hacer una gráfica de $B(t)$.

B3. Un joyero quiere revender una lámina de oro cuyos márgenes limitan las funciones $f(x)=(x-2)^2$ y $g(x)=x+4$. Si se mide en centímetros:

a) Hacer una gráfica de la lámina ¿Cuál es la superficie de la lámina?

b) Si cada centímetro cuadrado de lámina pesa 2 gramos, ¿cuántos gramos pesa la lámina?

c) Si el costo de adquisición de la lámina fue de 20 euros por gramo, ¿cuál debe ser el precio que debe poner a cada gramo de oro para tener un beneficio de 625 euros?

A4. Una cerrajería se encarga de realizar dos tipos de puertas mixtas, de hierro y madera. Para las puertas tipo TIMANFAYA, necesita 2 metros cuadrados de hierro y 2 metros cuadrados de madera, y para las puertas tipo TABURIENTE, necesita 1 metro cuadrado de hierro y 3 metros cuadrados de madera. Dispone un stock de 1000 metros cuadrados de hierro y 1500 metros cuadrados de madera. La cerrajería obtiene un beneficio de 250 euros por cada puerta tipo TIMANFAYA y, por cada puerta tipo TABURIENTE, obtiene un beneficio de 350 euros.

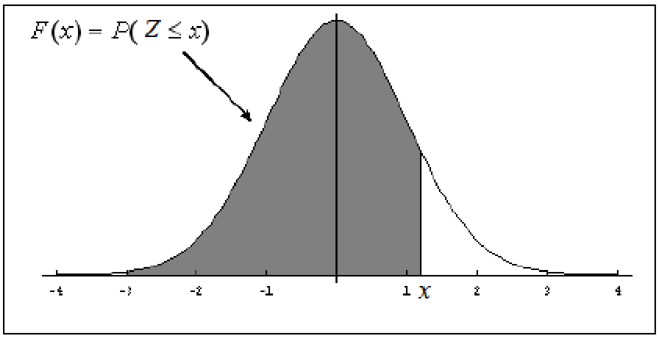
a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible y determinar sus vértices.

c) ¿Cuántas puertas de cada tipo se deben fabricar, con los metros cuadrados de material disponibles en el almacén, para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?

B4. Un avión ofrece asientos de tres clases: primera, business y turista. El número de asientos business son el doble que los de primera clase, y por cada 15 asientos de clase turista hay dos de clase business. El precio por asiento fue de 350€ para primera clase, 280€ para clase business y 200€ para la clase turista. Si el importe total cobrado por los asientos fue de 31280€, ¿cuántos asientos de cada clase había en el avión?

modelo2



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

A1. En un taller de electricidad de vehículos se reparan coches (45%), camiones (25%), guaguas (20%) y motos (resto). El 10% de los coches, el 15% de los camiones, el 9% de las guaguas y el 12% de las motos vienen al taller por fallos en el sistema de arranque.

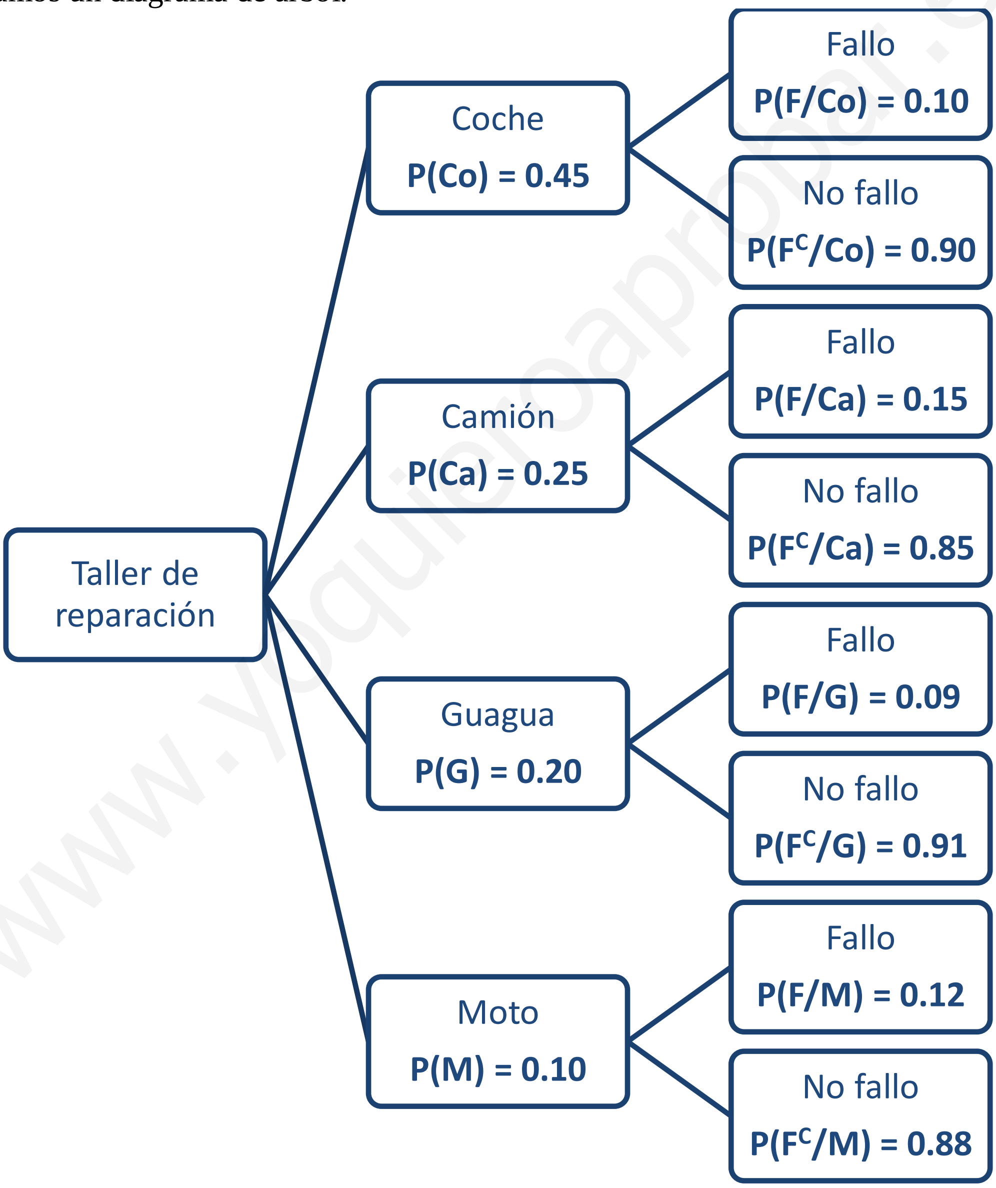
a) Construir un diagrama de árbol que describa lo anterior.

b) Calcular la probabilidad de que se repare en el taller un vehículo que no tenga fallos en el sistema de arranque.

c) Si se ha reparado en el taller un vehículo que presentaba fallos en el sistema de arranque, ¿cuál es la probabilidad de que sea una moto?

a) Llamamos Co al suceso "Entra un coche", Ca al suceso "Entra un camión", G al suceso "Entra una guagua" y M al suceso "Entra una moto". Llamamos F al suceso "Tener fallos en el sistema de arranque".

Realizamos un diagrama de árbol.



b) Nos piden calcular $P\left(F^C\right)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(F^C\right)=P(Co)P\left(F^C/Co\right)+P(Ca)P\left(F^C/Ca\right)+P(G)P\left(F^C/G\right)+P(M)P\left(F^C/M\right)=$$

$$=0.45\cdot 0.9+0.25\cdot 0.85+0.20\cdot 0.91+0.10\cdot 0.88=\boxed{0.8875}$$

c) Nos piden calcular $P(M/F)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/F)=\frac{P(M\cap F)}{P(F)}=\frac{P(M)P(F/M)}{1-P(F^C)}=\frac{0.10\cdot 0.12}{1-0.8875}=\boxed{\frac{8}{75}\simeq 0.1067}$$

B1. La probabilidad de que un ave rapaz, que nace en un zoológico, sobreviva más de 5 años, es del 10%.

a) Si en un zoo tenemos 10 aves rapaces nacidas este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellas sigan vivas dentro de 5 años.

b) Si entre todos los zoológicos del país hay 200 aves rapaces nacidas este mismo año, hallar la probabilidad de que, al cabo de 5 años, hayan sobrevivido más de 10 y menos de 15 de ellas.

c) Se ha hecho un seguimiento de 160 aves rapaces que viven en libertad, observándose que sólo 12 de ellas han sobrevivido más de 5 años. Calcular un intervalo de confianza al 90% para la proporción de aves rapaces en libertad que sobreviven más de 5 años.

La variable X cuenta el número de aves rapaces que sobreviven más de 5 años de un grupo de 10. Esta es una variable binomial, pues es dicotómica (sobrevive o no) y cada repetición es independiente entre sí.

a) Como $n = 10$ y p = P(sobrevivir) = 0.10 tenemos que la variable es $X = B(10, 0.1)$.

Calculamos la probabilidad pedida $P(X \geq 2)$ usando el suceso contrario.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1)\right] =$$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^9\right] \simeq \boxed{0.2639}$$

b) La nueva variable binomial tiene como parámetros n = 200 y p = 0.10.

X = B(200, 0.1)

Sus probabilidades se pueden aproximar por una normal de media $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0.1 = 20$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 3\sqrt{2} \simeq 4.24$.

Esta aproximación es buena pues $np = 20 > 5$ y $nq = 180 > 5$.

X = B(200, 0.1) se aproxima con Y = N(20, $3\sqrt{2}$)

$$P(10 < X < 15) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(10.5 \leq Y \leq 14.5) =$$

$$= P(Y \leq 14.5) - P(Y \leq 10.5) = \{\textit{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{14.5 - 20}{3\sqrt{2}}\right) - P\left(Z \leq \frac{10.5 - 20}{3\sqrt{2}}\right) =$$

$$= P(Z \leq -1.30) - P(Z \leq -2.24) = P(Z \geq 1.3) - P(Z \geq 2.24) =$$

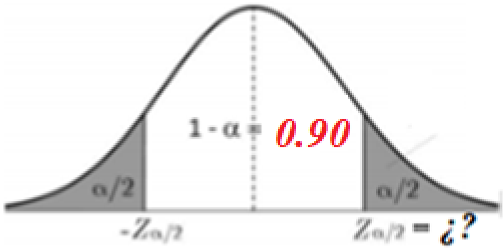
$$= 1 - P(Z \leq 1.3) - \left[1 - P(Z \leq 2.24)\right] = P(Z \leq 2.24) - P(Z \leq 1.3) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} =$$

$$= 0.9875 - 0.9032 = \boxed{0.0843}$$

c) En una muestra de tamaño $n = 160$ la proporción de aves que sobreviven es $p = \frac{12}{160} = 0.075$.

Con un nivel de confianza del 90 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$1-\alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0,10 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$



Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.075 \cdot 0.925}{160}} \simeq 0.0343$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = (0.075 - 0.0343;\quad 0.075 + 0.0343) = (0.0407;\quad 0.1093)$$

A2. Se realiza un estudio para evaluar qué proporción de los pasajeros en las rutas interinsulares viaja con descuento de residente. Para ello se toma una muestra de 300 pasajeros, de los cuales se observa que 225 viajan con este descuento.

a) Determinar un intervalo de confianza, al 96%, para la proporción de pasajeros que viajan con descuento de residente.

b) Usando la proporción de pasajeros con descuento de residencia calculada en esta muestra como estimación de dicha proporción en la población, ¿de qué tamaño debería ser la muestra si se desea construir un intervalo de confianza al 92% para esa proporción con un error máximo de 0.03?

c) Si se pierden los datos de 5 de los pasajeros de la muestra, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos viajara con descuento de residencia.

a) La proporción muestral de los pasajeros que en las rutas interinsulares viaja con descuento de residente es de $p=\frac{225}{300}=0.75$.

Con un nivel de confianza del 96 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}96 \rightarrow \alpha = 0{,}04 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}02 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}98 \rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{2.05+2.06}{2}=2.055$$

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}=2.055\cdot\sqrt{\frac{0.75\cdot 0.25}{300}}\simeq 0.0514$$

El intervalo de confianza es:

$$(p-Error,\ p+Error)=(0.75-0.0514;\quad 0.75+0.0514)=(0.6986;\quad 0.8014)$$

b) Con un nivel de confianza del 92 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}92 \rightarrow \alpha = 0{,}08 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}04 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2}=1.75$$

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.03=1.75\sqrt{\frac{0.75\cdot 0.25}{n}} \Rightarrow \frac{0.03}{1.75}=\sqrt{\frac{0.75\cdot 0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.03}{1.75}\right)^2=\frac{0.75\cdot 0.25}{n} \Rightarrow n\left(\frac{0.03}{1.75}\right)^2=0.75\cdot 0.25 \Rightarrow n=\frac{0.75\cdot 0.25}{\left(\frac{0.03}{1.75}\right)^2}\simeq 638.02$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.
El tamaño mínimo de la muestra es de 639 pasajeros.

c) Sea X el número de viajeros que viaja con descuento de un grupo de 5.
Esta es una variable binomial de parámetros n = 5 y p = probabilidad de que un pasajero viaje con descuento = 0.75. X = B(5, 0.75)
Deseamos calcular el valor de $P(X=0)$.

$$P(X=0)=\binom{5}{0}0.75^0\cdot 0.25^5=\boxed{\frac{1}{1024}\simeq 0.00098}$$

B2. Un fabricante de televisores afirma que la duración media de su producto es de 10 años. Para verificar esto, se selecciona una muestra aleatoria de 50 televisores y se encuentra que la duración media es de 9.5 años, con una desviación típica de 2 años.
a) Calcular el intervalo de confianza del 88% para la duración media de los televisores del fabricante.
b) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar la duración media de los televisores con un error menor de 6 meses y con un nivel de confianza del 95%?

X = Duración de un televisor en años. X = N(μ, 2).
Tamaño de la muestra = 50. Media muestral = $\overline{x} = 9.5\,años$

a) Con un nivel de confianza del 88 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}88 \rightarrow \alpha = 0{,}12 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}06 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}94 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.55+1.56}{2} = 1.555$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	[illegible]
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]	[illegible]	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]	[illegible]	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	[illegible]	[illegible]	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	[illegible]	[illegible]	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	[illegible]	[illegible]	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	[illegible]	[illegible]	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	[illegible]	[illegible]	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	[illegible]	[illegible]	0.
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	[illegible]	[illegible]	0.
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	[illegible]	[illegible]	0.
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	[illegible]	[illegible]	0.
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	[illegible]	[illegible]	0.
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	[illegible]	[illegible]	0.
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	[illegible]	[illegible]	0.
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	[illegible]	[illegible]	0.
1.5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9394	0.9406	0.
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	[illegible]	[illegible]	0.

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.555 \frac{2}{\sqrt{50}} \simeq 0.44 \text{ años}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = (9.5 - 0.44; \quad 9.5 + 0.44) = (9.06; \quad 9.94)$$

b) Con un nivel de confianza de 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizamos la fórmula del error y ponemos que este sea de seis meses, es decir, 0,5 años:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow 1.96 \cdot 2 = 0.5\sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 2}{0.5}\right)^2 = 61.46$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor que la cifra obtenida, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es de 62 televisores.

A3. El beneficio de una empresa, en miles de euros, a lo largo de 50 años viene dado por:

$$B(t)=\begin{cases} -0,04t^2+2,4t & para \quad 0\le t<40 \\ \dfrac{40t-320}{t} & para \quad 40\le t\le 50 \end{cases}$$

siendo t el tiempo transcurrido (en años).
a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $B(t)$ a lo largo de los 50 años.
b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $B(t)$. ¿Cuál es el beneficio máximo y cuándo se produjo?
c) Hacer una gráfica de $B(t)$.

a) En el intervalo [0, 40) la función es $B(t)=-0,04t^2+2,4t$. Esta función es polinómica y es continua en [0, 40).

En el intervalo (40, 50] la función es $B(t)=\dfrac{40t-320}{t}$. Esta función no es continua en $t = 0$ pues se anula el denominador, pero este valor no pertenece a su dominio de definición. La función es continua en (40, 50].

Veamos si la función es continua en $t = 40$.

$$\left.\begin{array}{l} B(40)=\dfrac{40\cdot 40-320}{40}=32 \\ \lim\limits_{t\to 40^-} B(t)=\lim\limits_{t\to 40^-} -0,04t^2+2,4t=-0,04\cdot 40^2+2,4\cdot 40=32 \\ \lim\limits_{t\to 40^+} B(x)=\lim\limits_{t\to 40^+} \dfrac{40t-320}{t}=32 \end{array}\right\} \Rightarrow B(40)=\lim_{t\to 40^-} B(t)=\lim_{t\to 40^+} B(t)=32$$

La función es continua en $t = 40$.

La función es continua en su dominio = [0, 50]

La función es derivable en $[0,40)\cup(40,50]$ y su derivada es:

$$B'(t)=\begin{cases} -0.08t+2.4 & si \quad 0\le t<40 \\ \dfrac{40t-(40t-320)}{t^2}=\dfrac{320}{t^2} & si \quad 40<t\le 50 \end{cases}$$

Comprobamos si es derivable en el cambio de definición de la función.

¿Es derivable en $t = 40$?

$$\left.\begin{array}{l} B'(40^-)=\lim\limits_{t\to 40^-} B'(t)=\lim\limits_{t\to 40^-} -0.08t+2.4=-\dfrac{4}{5} \\ B'(40^+)=\lim\limits_{t\to 40^+} B'(t)=\lim\limits_{t\to 40^+} \dfrac{320}{t^2}=\dfrac{320}{40^2}=\dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow B'(40^-)=\frac{-4}{5}\neq\frac{1}{5}=B'(40^+)$$

La función no es derivable en $t = 40$.

La función es continua en [0, 50] y derivable en $[0,40)\cup(40,50]$

b) Usamos la derivada.

$$B'(t)=\begin{cases} -0.08t+2.4 & si \quad 0\le t<40 \\ \dfrac{40t-(40t-320)}{t^2}=\dfrac{320}{t^2} & si \quad 40<t\le 50 \end{cases}$$

$$B'(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} -0.08t+2.4=0 \to t=\dfrac{2.4}{0.08}=30\in[0,40) \\ \dfrac{320}{t^2}=0 \to No\,es\ posible \end{cases}$$

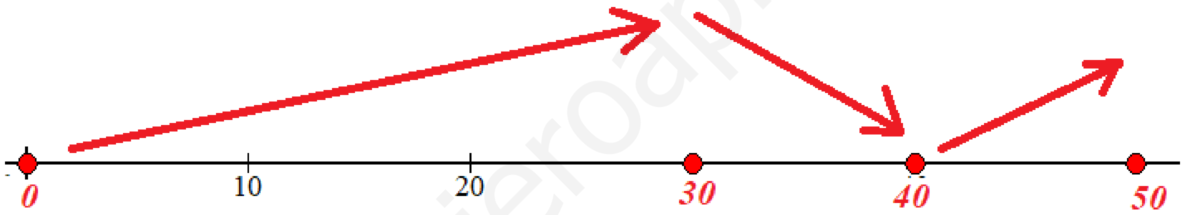
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de 30 y 40.

En el intervalo [0, 30) tomamos $t = 10$ y la derivada vale $B'(10)=-0.08\cdot 10+2.4=1.6>0$. La función crece en [0, 30).

En el intervalo (30, 40) tomamos $t = 35$ y la derivada vale $B'(35)=-0.08\cdot 35+2.4=-0.4<0$. La función decrece en (30, 40).

En el intervalo (40, 50] tomamos $t = 45$ y la derivada vale $B'(45)=\dfrac{320}{45^2}>0$. La función crece en (40, 50].

La función sigue el esquema siguiente:



Resumiendo: La función beneficios crece los primeros 30 años y los 10 últimos y decrece entre los 30 y los 40 años.

Valoramos los beneficios en el año 30 y en el año 50.

$$\left.\begin{array}{l} B(30)=-0,04\cdot 30^2+2,4\cdot 30=36 \text{ ¡Máximo!} \\ B(50)=\dfrac{40\cdot 50-320}{50}=33.6 \end{array}\right\}$$

El beneficio máximo se consigue en el año 30, siendo su valor de 36000 €.

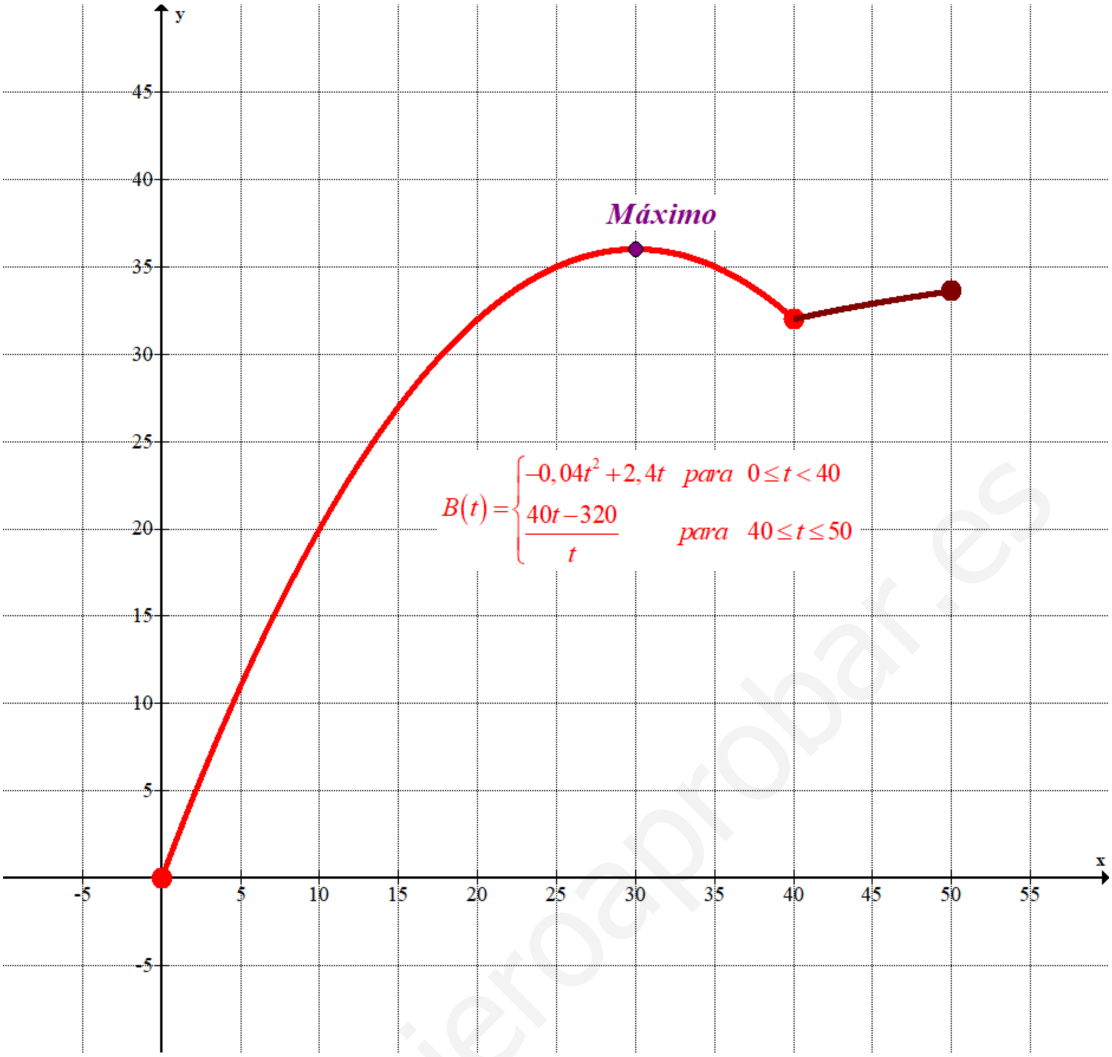
c) Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

$0\le t<40$

t	$B(t)=-0,04t^2+2,4t$
0	0
30	36
35	35

$40\le t\le 50$

t	$B(t)=\dfrac{40t-320}{t}$
40	32
45	32.89
50	33.6


y
x
Máximo
$B(t)=\begin{cases} -0,04t^2+2,4t & para\ \ 0\le t<40 \\ \dfrac{40t-320}{t} & para\ \ 40\le t\le 50 \end{cases}$

B3. Un joyero quiere revender una lámina de oro cuyos márgenes limitan las funciones $f(x)=(x-2)^2$ y $g(x)=x+4$. Si se mide en centímetros:

a) Hacer una gráfica de la lámina ¿Cuál es la superficie de la lámina?

b) Si cada centímetro cuadrado de lámina pesa 2 gramos, ¿cuántos gramos pesa la lámina?

c) Si el costo de adquisición de la lámina fue de 20 euros por gramo, ¿cuál debe ser el precio que debe poner a cada gramo de oro para tener un beneficio de 625 euros?

a) Los márgenes los limitan una parábola y una recta.
Averiguamos donde se cortan.

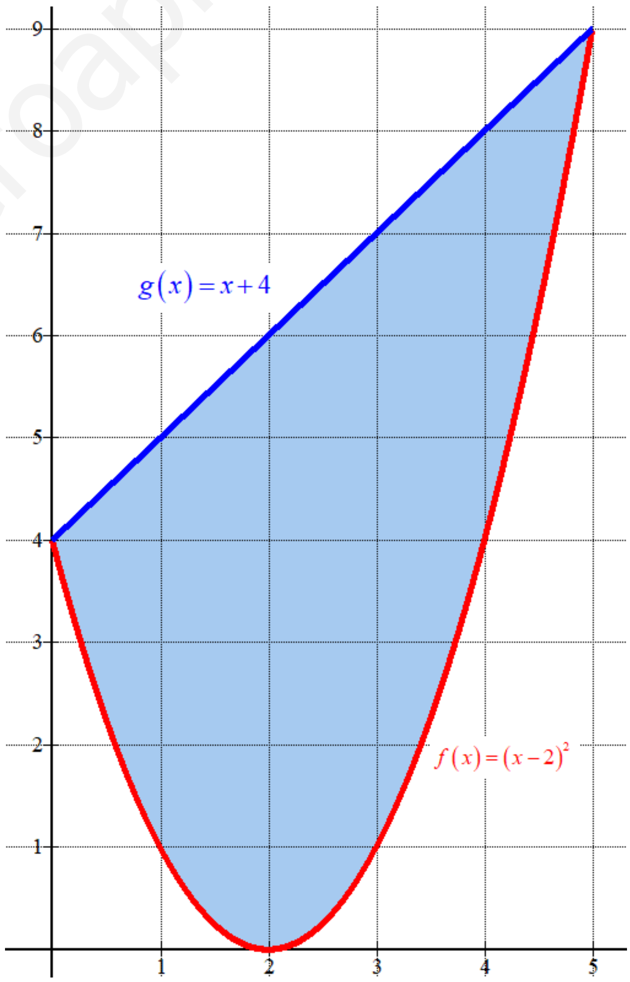
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-2)^2 \\ g(x)=x+4 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (x-2)^2=x+4 \Rightarrow x^2-4x+4=x+4 \Rightarrow x^2-5x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases}$$

Dibujamos la región limitada por ambas funciones.

x	$f(x)=(x-2)^2$
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4
5	9

x	$g(x)=x+4$
0	4
1	5
3	7
5	9



Calculamos la superficie de la lámina como la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 0 y 5.

$$\int_0^5 x+4-\left(x^2-4x+4\right)dx=\int_0^5 x+4-x^2+4x-4dx=\int_0^5 -x^2+5xdx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}\right]_0^5=\left[-\frac{5^3}{3}+5\frac{5^2}{2}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+5\frac{0^2}{2}\right]=\frac{-125}{3}+\frac{125}{2}=\boxed{\frac{125}{6}\simeq 20.83\ u^2}$$

La superficie de la lámina es de 20.83 cm^2.

b) Si cada centímetro cuadrado de lámina pesa 2 gramos la lámina pesa $\frac{125}{6}\cdot 2=\frac{125}{3}\simeq 41.6\,gramos$.

c) Si el beneficio total debe ser de 625 € el beneficio por cada gramo debe ser:

$$625:\frac{125}{3}=15\text{ €}/\,gramo\,.$$

El precio por gramo debe ser la suma del precio de adquisición y las ganancias:

20 + 15 = 35 €/gramo

A4. Una cerrajería se encarga de realizar dos tipos de puertas mixtas, de hierro y madera. Para las puertas tipo TIMANFAYA, necesita 2 metros cuadrados de hierro y 2 metros cuadrados de madera, y para las puertas tipo TABURIENTE, necesita 1 metro cuadrado de hierro y 3 metros cuadrados de madera. Dispone un stock de 1000 metros cuadrados de hierro y 1500 metros cuadrados de madera. La cerrajería obtiene un beneficio de 250 euros por cada puerta tipo TIMANFAYA y, por cada puerta tipo TABURIENTE, obtiene un beneficio de 350 euros.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible y determinar sus vértices.

c) ¿Cuántas puertas de cada tipo se deben fabricar, con los metros cuadrados de material disponibles en el almacén, para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?

a) Llamamos x = número de puertas TIMANFAYA e y = número de puertas TABURIENTE. Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	m^2 de hierro	m^2 de madrea	Beneficios
Nº puertas TIMANFAYA (x)	2x	2x	250x
Nº puertas TABURIENTE (y)	y	3y	350y
TOTAL	$2x+y$	$2x+3y$	$250x+350y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x,y)=250x+350y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ \ y \geq 0$

"Dispone un stock de 1000 metros cuadrados de hierro y 1500 metros cuadrados de madera" → $2x+y \leq 1000;\ 2x+3y \leq 1500$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y \leq 1000 \\ 2x+3y \leq 1500 \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$2x+y=1000$

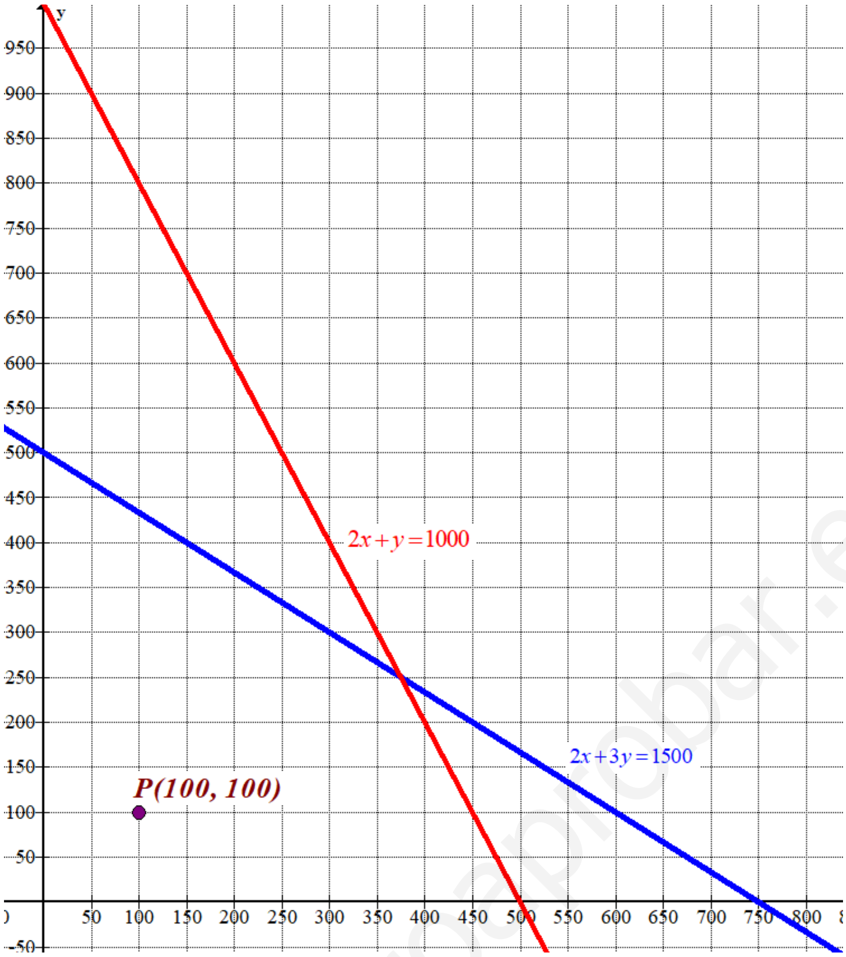
x	$y=1000-2x$
0	1000
100	800
500	0

$2x+3y=1500$

x	$y=\dfrac{1500-2x}{3}$
0	500
300	300
750	0

$x \geq 0;\ \ y \geq 0$

Primer cuadrante

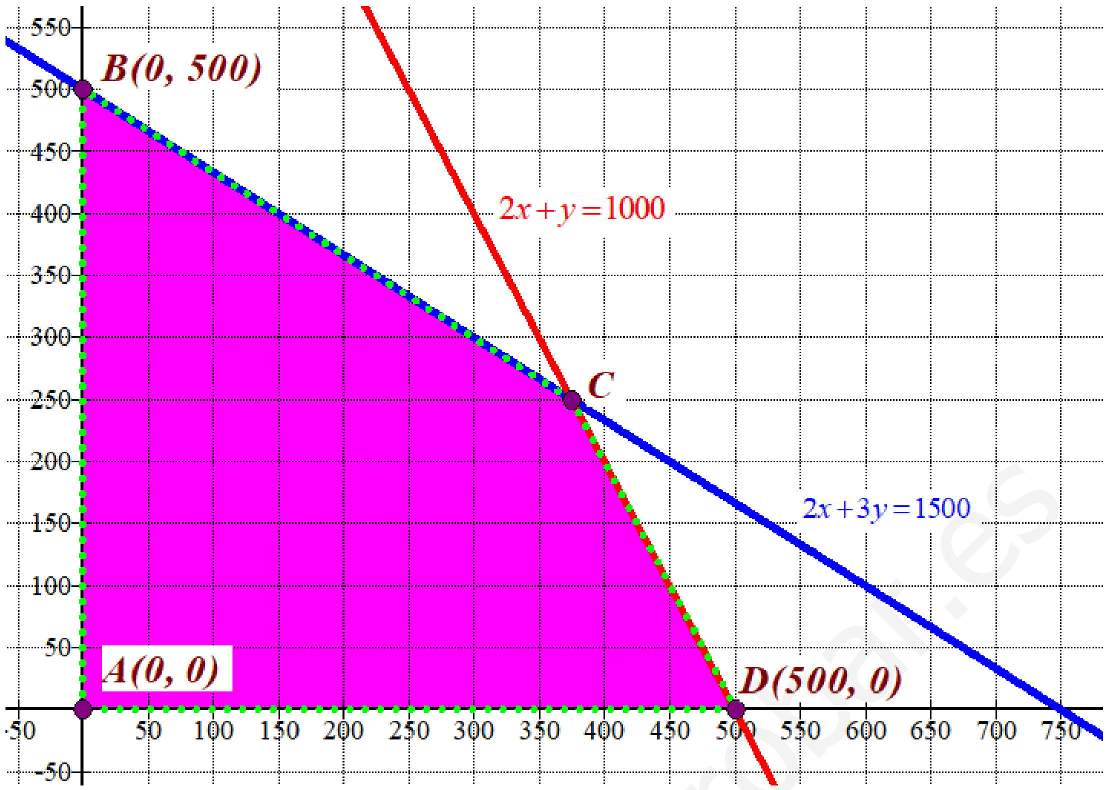


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+y\leq 1000 \\ 2x+3y\leq 1500 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(100, 100) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 200+100\leq 1000 \\ 200+300\leq 1500 \\ 100\geq 0;\ \ 100\geq 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice C resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$C \to \left.\begin{array}{l} 2x+y=1000 \\ 2x+3y=1500 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1000-2x \\ 2x+3y=1500 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+3(1000-2x)=1500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+3000-6x=1500 \Rightarrow -4x=-1500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1500}{4}=375 \Rightarrow y=1000-750=250 \Rightarrow C(375,250)$$

Los vértices de la región factible son A(0, 0), B(0, 500), C(375, 250) y D(500, 0)

c) Valoramos la función beneficio $B(x,y)=250x+350y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$
B(0, 500) → $B(0,500)=250\cdot 0+350\cdot 500=175.000$
C(375, 250) → $B(375,250)=250\cdot 375+350\cdot 250=181.250$ ¡Máximo!
D(500, 0) → $B(500,0)=250\cdot 500+350\cdot 0=125.000$

El beneficio máximo es de 181250 € y se consigue en el vértice C(375, 250), que significa fabricar 375 puertas TIMANFAYA y 250 puertas TABURIENTE..

B4. Un avión ofrece asientos de tres clases: primera, business y turista. El número de asientos business son el doble que los de primera clase, y por cada 15 asientos de clase turista hay dos de clase business. El precio por asiento fue de 350€ para primera clase, 280€ para clase business y 200€ para la clase turista. Si el importe total cobrado por los asientos fue de 31280€, ¿cuántos asientos de cada clase había en el avión?

a) Llamamos "x" al número de asientos de primera, "y" al número de asientos business y "z" al número de asientos de turista.

"El número de asientos business son el doble que los de primera clase" → $y = 2x$

"Por cada 15 asientos de clase turista hay dos de clase business" →

$$\left.\begin{array}{ccc} Turista & & Business \\ 15 & \longrightarrow & 2 \\ z & \longrightarrow & y \end{array}\right\} \Rightarrow 15y = 2z$$

"El precio por asiento fue de 350€ para primera clase, 280€ para clase business y 200€ para la clase turista. El importe total cobrado por los asientos fue de 31280€" →
$350x + 280y + 200z = 31280$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 350x + 280y + 200z = 31280 \\ y = 2x \\ 15y = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 35x + 28y + 20z = 3128 \\ y = 2x \\ 15y = 2z \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema planteado

$$\left.\begin{array}{l} 35x + 28y + 20z = 3128 \\ y = 2x \\ 15y = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 35x + 28(2x) + 20z = 3128 \\ 15(2x) = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 35x + 56x + 20z = 3128 \\ 30x = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 91x + 20z = 3128 \\ 15x = z \end{array}\right\} \Rightarrow 91x + 20(15x) = 3128 \Rightarrow 391x = 3128 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{3128}{391} = 8} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{z = 15 \cdot 8 = 120} \\ \boxed{y = 2 \cdot 8 = 16} \end{array}\right.$$

Hay 8 asientos de primera clase, 16 asientos tipo business y 120 asientos tipo turista.