**COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT**
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

| **PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT** | PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD |
|---|---|
| **CONVOCATÒRIA: JULIOL 2023** | CONVOCATORIA: JULIO 2023 |
| **Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II** | Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II |

BAREMO DEL EXAMEN: **Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos.** Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

**Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.**

**Problema 1.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\quad y\quad B=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-1&4&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz $A^2$ y su inversa. *(5 puntos)*

b) Resolver la ecuación matricial $2A^2X=4B$. *(5 puntos)*

**Problema 2.** Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?

*(Planteamiento correcto 5 puntos-Resolución correcta 5 puntos)*

**Problema 3.** Se considera la función $f(x)=\dfrac{4x-5}{2\left(x^2-1\right)}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

**Problema 4.** El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las $x$ horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+14, & si\ \ x\in[0,6] \\ -x^2+24x-82, & si\ \ x\in]6,18] \\ -x+34, & si\ \ x\in]18,24] \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo [0,24]. *(3 puntos)*

b) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores? *(4 puntos)*

c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana. *(3 puntos)*

**Problema 5.** Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con otro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa? *(2 puntos)*

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias? *(2 puntos)*

c) Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería? (3 puntos)

d) ¿Son independientes los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería”? *(3 puntos)*

**Problema 6**. En una población hay dos compañías, $A$ y $B$, que proporcionan el servicio de internet. La compañía $A$ proporciona servicio al 70% de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65% de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía $B$ ha contratado televisión de pago.

a) Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía $A$. *(3 puntos)*

b) Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía $B$? *(4 puntos)*

c) Sea $A$ el suceso “ser cliente de la compañía $A$" y $C$ el suceso “haber contratado la televisión de pago”. Calcula $P(A\cup C)$. *(3 puntos)*

# Soluciones

**Problema 1.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ -1 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz $A^2$ y su inversa. *(5 puntos)*

b) Resolver la ecuación matricial $2A^2X=4B$. *(5 puntos)*

a) Determinamos la expresión de la matriz $A^2$.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0+0 & 1+2+0 & 0-2+0\\ 0+0+2 & 0+4-0 & 0-4-2\\ -1+0-1 & -1+0+0 & 0+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & -6\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Comprobamos que la matriz $A^2$ tiene inversa y la calculamos.

$$\left|A^2\right|=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 4 & -6\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=4+36+4-16-6-6=16\neq 0\rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$\left(A^2\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A^2\right)^T\right)}{\left|A^2\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 4 & -1\\ -2 & -6 & 1\end{pmatrix}}{16}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}4 & -1\\ -6 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & -6\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & -2\\ -6 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left(A^2\right)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & -1 & -10\\ 10 & -3 & 2\\ 6 & -5 & -2\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$2A^2X=4B\Rightarrow A^2X=2B\Rightarrow X=2\left(A^2\right)^{-1}B$$

Sustituimos y determinamos la matriz X.

$$X=2\left(A^2\right)^{-1}B=2\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & -1 & -10\\ 10 & -3 & 2\\ 6 & -5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ -1 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-6+1+0 & 4-4+0 & -2-2-10\\ 30+3+0 & -20-12+0 & 10-6+2\\ 18+5+0 & -12-20+0 & 6-10-2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-5 & 0 & -14\\ 33 & -32 & 6\\ 23 & -32 & -6\end{pmatrix}}$$

**Problema 2.** Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?
*(Planteamiento correcto 5 puntos-Resolución correcta 5 puntos)*

Llamamos "x" al dinero que recibe la hija mayor, "y" a lo que recibe la mediana y "z" lo que recibe la menor.

"A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos" → $x=9+\frac{y+z}{2}$

"A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos" → $y=\frac{x+z}{2}$

**"**A la hija pequeña le ha dejado el 35% de la suma de lo que ha dejado a las otras dos**"** → $z=0.35(x+y)$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x=9+\frac{y+z}{2} \\ y=\frac{x+z}{2} \\ z=0.35(x+y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x=18+y+z \\ 2y=x+z \\ 100z=35x+35y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y-z=18 \\ x-2y+z=0 \\ 20z=7x+7y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y-z=18 \\ x=2y-z \\ 20z=7x+7y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2(2y-z)-y-z=18 \\ 20z=7(2y-z)+7y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4y-2z-y-z=18 \\ 20z=14y-7z+7y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3y-3z=18 \\ 27z=21y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y-z=6 \rightarrow y=6+z \\ 9z=7y \end{array}\right\} \Rightarrow 9z=7(6+z) \Rightarrow 9z=42+7z \Rightarrow 2z=42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=\frac{42}{2}=21} \Rightarrow \boxed{y=6+21=27} \Rightarrow \boxed{x=2\cdot 27-21=33}$$

El millonario le ha dejado 33 millones de euros a su hija mayor, 27 millones a la mediana y 21 millones a la menor.

**Problema 3.** Se considera la función $f(x)=\dfrac{4x-5}{2(x^2-1)}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

a) El dominio de la función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$2(x^2-1)=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Puntos de corte con el eje OY:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{4x-5}{2(x^2-1)} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{4\cdot 0-5}{2(0^2-1)}=2.5 \Rightarrow \boxed{A(0,2.5)}$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{4x-5}{2(x^2-1)} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4x-5}{2(x^2-1)}=0 \Rightarrow 4x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{4}=1.25 \Rightarrow \boxed{B(1.25,0)}$$

Los puntos de corte con los ejes son: A(0, 2.5) y B(1.25, 0).

b) **Asíntota vertical.** $x=a$

¿$x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{4x-5}{2(x^2-1)}=\frac{4(-1)-5}{2((-1)^2-1)}=\frac{-9}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical

¿$x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{4x-5}{2(x^2-1)}=\frac{4(1)-5}{2(1^2-1)}=\frac{-1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

**Asíntota horizontal.** $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-5}{2(x^2-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{2\left(\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}}{2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\frac{\dfrac{4}{\infty}-\dfrac{5}{\infty}}{2\left(1-\dfrac{1}{\infty}\right)}=\frac{0}{2}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{4x-5}{2\left(x^2-1\right)}=\frac{4x-5}{2x^2-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(4)\left(2x^2-2\right)-(4x)(4x-5)}{\left(2x^2-2\right)^2}=$$

$$=\frac{8x^2-8-16x^2+20x}{\left(2x^2-2\right)^2}=\frac{-8x^2+20x-8}{\left(2x^2-2\right)^2}=\frac{4\left(-2x^2+5x-2\right)}{4\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x^2+5x-2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

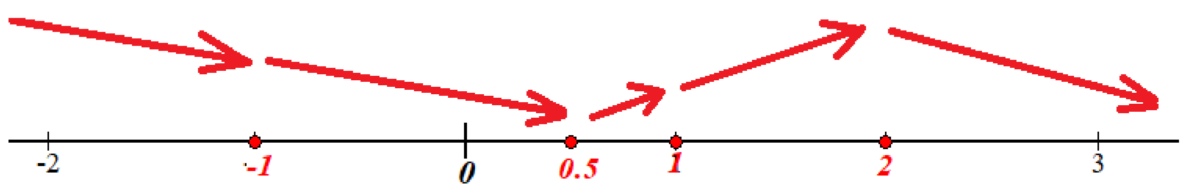
$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2x^2+5x-2}{\left(x^2-1\right)^2}=0\Rightarrow -2x^2+5x-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(-2)(-2)}}{2(-2)}=\frac{-5\pm 3}{-4}=\begin{cases}\frac{-5+3}{-4}=\boxed{\frac{1}{2}=x}\\ \frac{-5-3}{-4}=\boxed{2=x}\end{cases}$$

Averiguamos el signo de la derivada antes, entre y después de –1 (excluido del dominio), 0.5 (punto crítico), 1 (excluido del dominio) y 2 (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=\frac{-2(-2)^2+5(-2)-2}{\left((-2)^2-1\right)^2}=\frac{-20}{+}<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,0.5)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=\frac{-2}{\left(0^2-1\right)^2}=-2<0$. La función decrece en $(-1,0.5)$.
- En el intervalo $(0.5,\ 1)$ tomamos $x=0.9$ y la derivada vale $f'(0.9)=\frac{-2\cdot 0.9^2+5\cdot 0.9-2}{\left(0.9^2-1\right)^2}=\frac{0.88}{+}>0$. La función crece en $(0.5,\ 1)$.
- En el intervalo $(1,\ 2)$ tomamos $x=1.5$ y la derivada vale $f'(1.5)=\frac{-2\cdot 1.5^2+5\cdot 1.5-2}{\left(1.5^2-1\right)^2}=\frac{1}{+}>0$. La función crece en $(1,\ 2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3)=\frac{-2\cdot 3^2+15-2}{\left(3^2-1\right)^2}=\frac{-5}{64}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



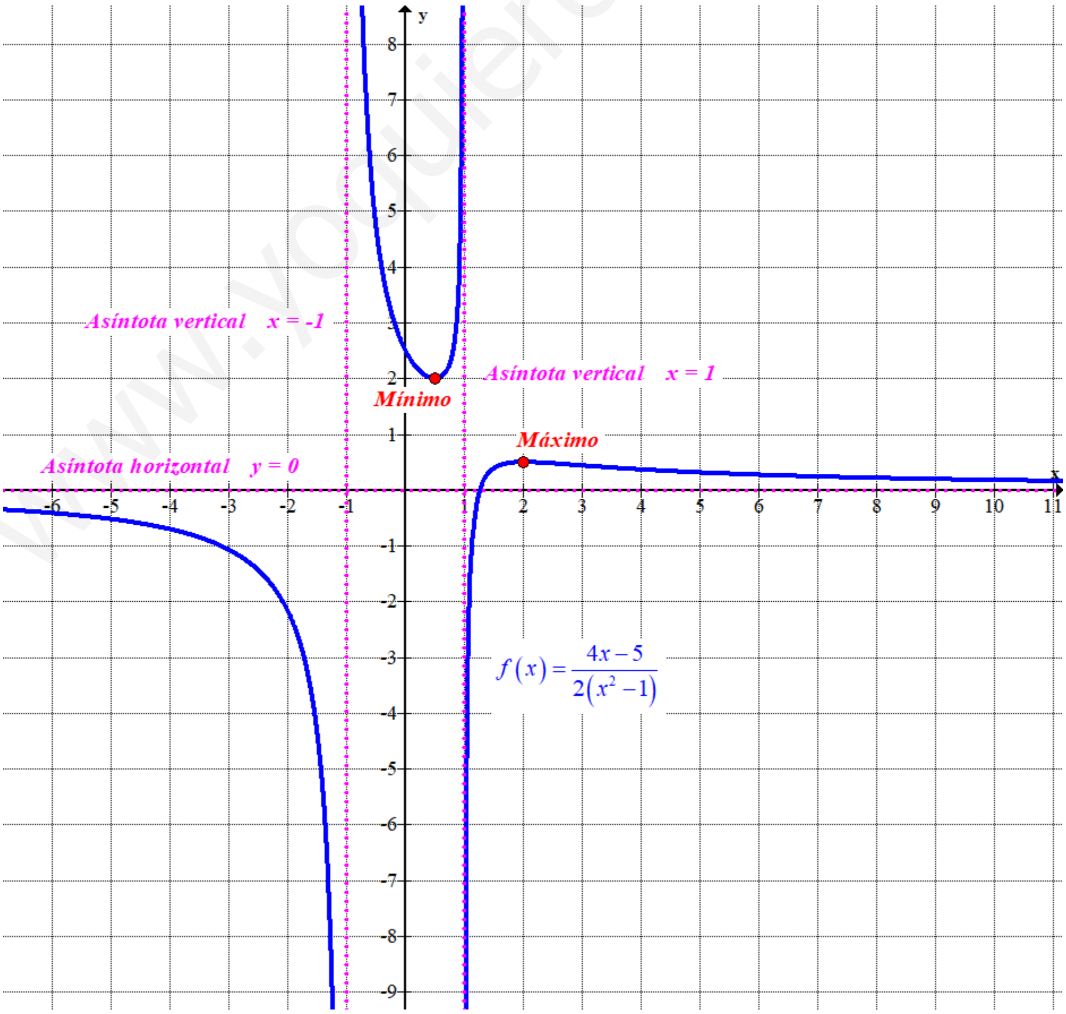
La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(-1,\ 0.5)\cup(2,+\infty)$ y crece en $(0.5,1)\cup(1,2)$.

d) Observando el esquema de evolución de la función podemos afirmar que la función tiene un mínimo local en *x = 0.5* y un máximo local en *x = 2*.

Como $f(0.5)=\dfrac{4\cdot 0.5-5}{2(0.5^2-1)}=2$ y $f(2)=\dfrac{4\cdot 2-5}{2(2^2-1)}=0.5$ las coordenadas del mínimo local son (0.5, 2) y del máximo local son (2, 0.5)

e) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.

| $x$ | $f(x)=\dfrac{4x-5}{2(x^2-1)}$ |
|---|---|
| $-2$ | $-2.16$ |
| 0 | 2.5 |
| 0.5 | 2 Mínimo |
| 0.8 | 2.5 |
| 1.5 | 0.4 |
| 2 | 0.5 Máximo |
| 3 | 0.43 |
| 4 | 0.36 |



**Problema 4.** El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las $x$ horas de un día viene dado por la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+14, & si\ x\in[0,6] \\ -x^2+24x-82, & si\ x\in\,]6,18] \\ -x+34, & si\ x\in\,]18,24] \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo [0,24]. *(3 puntos)*
b) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores? *(4 puntos)*
c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana. *(3 puntos)*

a) La función en cada intervalo es continua por ser expresiones de funciones polinómicas. Para que sea continua debe serlo en los cambios de definición: $x = 6$ y $x = 18$.

¿Es continua en $x = 6$?

$$\left.\begin{array}{l} f(6)=2\cdot 6+14=26 \\ \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^-} 2x+14=26 \\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^+} -x^2+24x-82=-6^2+24\cdot 6-82=26 \end{array}\right\} \Rightarrow f(6)=\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^+} f(x)=26$$

La función es continua en $x = 6$.

¿Es continua en $x = 18$?

$$\left.\begin{array}{l} f(18)=-18^2+24\cdot 18-82=26 \\ \lim\limits_{x\to 18^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 18^-} -x^2+24x-82=26 \\ \lim\limits_{x\to 18^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 18^+} -x+34=-18+34=16 \end{array}\right\} \Rightarrow f(18)=\lim_{x\to 18^-} f(x)=26\neq 16=\lim_{x\to 18^+} f(x)$$

La función no es continua en $x = 18$.

*Resumiendo*: La función es continua en $[0,18)\cup(18,24]$.

b) En el intervalo [0, 6] la función es $f(x)=2x+14$ que es una función lineal con pendiente 2 > 0, por lo que es creciente.
En el intervalo (6, 18] la función es $f(x)=-x^2+24x-82$ que es una función parabólica. Derivamos e igualamos a cero en busca de su vértice.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=-2x+24 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x+24=0 \Rightarrow x=\frac{24}{2}=12\in(6,18]$$

En $x = 12$ hay un máximo relativo pues la segunda derivada es negativa.

$$f''(x)=-2 \Rightarrow f''(12)=-2<0$$

En el intervalo [0, 6] la función es $f(x) = -x + 34$ que es una función lineal con pendiente –1 < 0, por lo que es decreciente.

Valoramos la función en 0, 6, 12, 18 y 24 en busca de su valor máximo y mínimo.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 2\cdot 0 + 14 = 14 \\ f(6) = 2\cdot 6 + 14 = 26 \\ f(12) = -12^2 + 24\cdot 12 - 82 = 62 \text{ ¡Máximo!} \\ f(18) = -18^2 + 24\cdot 18 - 82 = 26 \\ f(24) = -24 + 34 = 10 \text{ ¡Mínimo!} \end{array}\right\}$$

El consumo máximo se produce a las 12 horas y el mínimo a las 24 horas.
El máximo consumo es de 62 Mwh y el mínimo de 10 Mwh.

c) En el intervalo [8, 10] la función es $f(x) = -x^2 + 24x - 82$.

Comprobamos si la función corta el eje en dicho intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 24x - 82 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2 + 24x - 82 = 0 \Rightarrow x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4(-1)(-82)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-24 \pm 2\sqrt{62}}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-24 + 2\sqrt{62}}{-2} = 12 - \sqrt{62} \simeq 4.1 \notin (8,10] \\ \dfrac{-24 - 2\sqrt{62}}{-2} = 12 + \sqrt{62} \simeq 19.87 \notin (8,10] \end{cases}$$

El consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana es el valor de la integral definida entre 8 y 10 de la función.

$$Consumo = \int_8^{10} f(x)\,dx = \int_8^{10} -x^2 + 24x - 82 dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 12x^2 - 82x\right]_8^{10} =$$

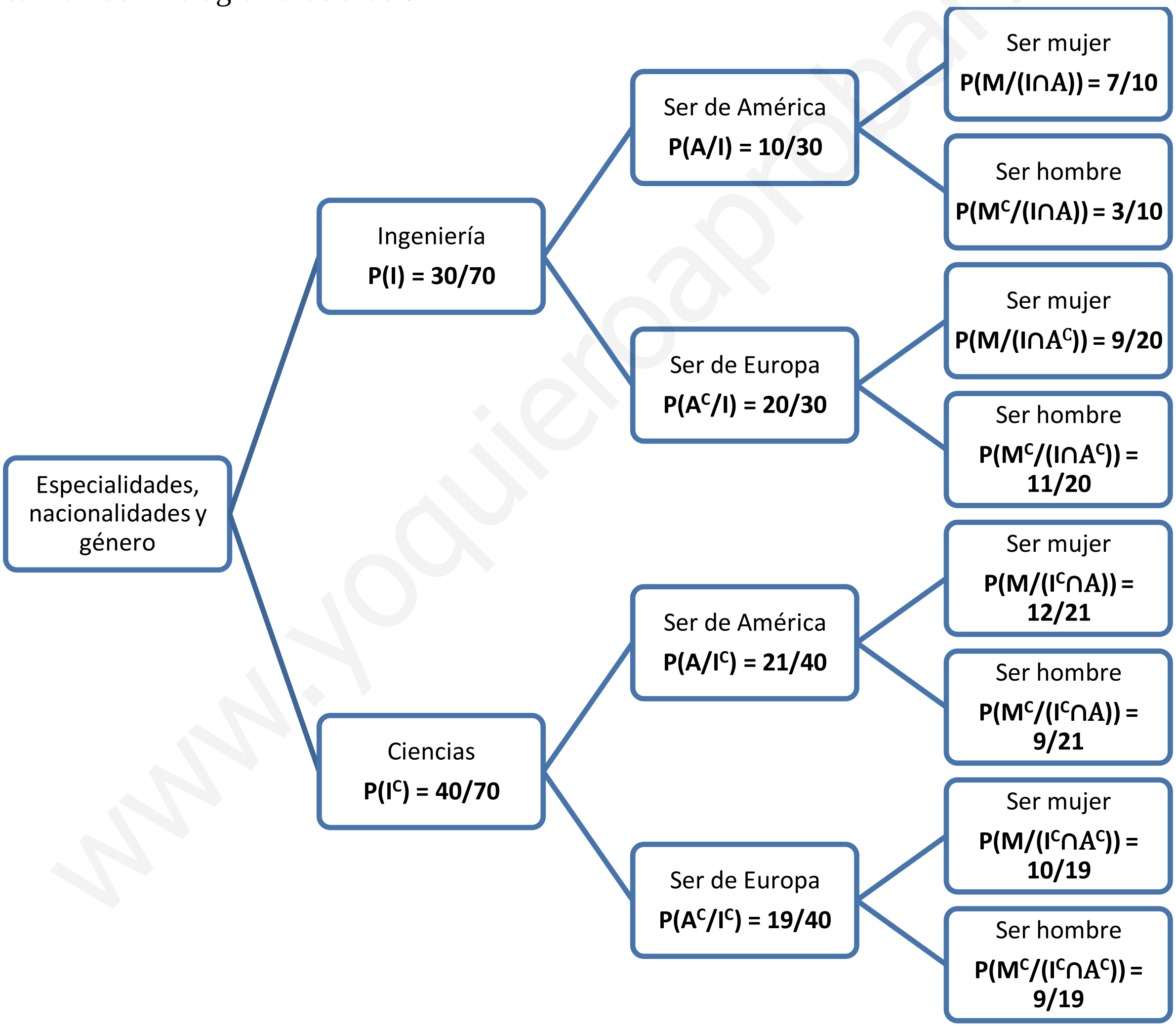
$$= \left[-\frac{10^3}{3} + 12\cdot 10^2 - 82\cdot 10\right] - \left[-\frac{8^3}{3} + 12\cdot 8^2 - 82\cdot 8\right] =$$

$$= -\frac{1000}{3} + 1200 - 820 + \frac{512}{3} - 768 + 656 = \boxed{\frac{316}{3} \simeq 105.33\ Mwh}$$

El consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana es, aproximadamente, de 105.33 Mwh.

**Problema 5.** Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con otro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa? *(2 puntos)*
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias? *(2 puntos)*
c) Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería? (3 puntos)
d) ¿Son independientes los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería”? *(3 puntos)*

a) Llamamos *I* al suceso “Ser especialista en ingeniería”, *A* al suceso “ser de América” y M al suceso “Ser mujer”.
Hay 10 + 20 = 30 especialistas de ingeniería y 21 + 19 = 40 especialistas en ciencias. Un total de 70 especialistas. De los 70 especialistas son 7 + 9 + 12 + 10 = 38 mujeres y 70 – 38 = 32 hombres.
Realizamos un diagrama de árbol.




a) Nos piden calcular $P\left(A^C\right)$. Aplicamos regla de Laplace. Hay 70 especialistas y $20+19=39$ son de Europa.

$$P\left(A^C\right)=\boxed{\frac{39}{70}\simeq 0.5571}$$

b) Nos piden calcular $P\left(M^C \cap I^C\right)$. Observando los datos del diagrama de árbol este suceso se cumple en dos de sus ramas (la última y la antepenúltima)

$$P\left(M^C \cap I^C\right) = P\left(I^C \cap A \cap M^C\right) + P\left(I^C \cap A^C \cap M^C\right) =$$

$$= \frac{40}{70} \cdot \frac{21}{40} \cdot \frac{9}{21} + \frac{40}{70} \cdot \frac{19}{40} \cdot \frac{9}{19} = \frac{9}{70} + \frac{9}{70} = \boxed{\frac{9}{35} \simeq 0.2571}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Se puede resolver aplicando la regla de Laplace. De los 70 especialistas hay $40-(12+10)=18$ que son hombres de ciencias.

$$P\left(M^C \cap I^C\right) = \frac{18}{70} = \boxed{\frac{9}{35} \simeq 0.2571}$$

c) Calculamos las dos probabilidades $P(I/M)$ y $P\left(I^C/M\right)$ y comparamos estos valores.

Calculamos $P(I/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(I/M) = \frac{P(I \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{7+9}{70}}{\frac{7+9+12+10}{70}} = \frac{16}{38} = \boxed{\frac{8}{19} \simeq 0.4211}$$

Calculamos $P\left(I^C/M\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P\left(I^C/M\right) = \frac{P\left(I^C \cap M\right)}{P(M)} = \frac{\frac{12+10}{70}}{\frac{7+9+12+10}{70}} = \frac{22}{38} = \boxed{\frac{11}{19} \simeq 0.5789}$$

Como $P\left(I^C/M\right) = \frac{11}{19} \geq \frac{8}{19} = P(I/M)$ es más probable que la mujer elegida sea del grupo de especialistas de ciencias.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Hay 7 + 9 = 16 mujeres en el grupo de especialistas de ingeniería y 10 +12 = 22 en el grupo de especialistas de ciencias. Por lo que es más probable que la mujer sea del grupo de ciencias por tener más mujeres dicho grupo.

d) ¿Son independientes los sucesos M = "ser mujer" e I = "ser especialista en ingeniería"?
Para que se cumpla debe cumplirse que $P(M \cap I) = P(M)P(I)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(M \cap I) = \frac{7+9}{70} = \frac{16}{70} = \frac{1120}{4900} \\ P(M)P(I) = \frac{7+9+12+10}{70} \cdot \frac{30}{70} = \frac{1140}{4900} \end{array}\right\} \Rightarrow P(M \cap I) = \frac{1120}{4900} \neq \frac{1140}{4900} = P(M)P(I)$$

Los sucesos "ser mujer" y "ser especialista en ingeniería" no son independientes.

**Problema 6**. En una población hay dos compañías, $A$ y $B$, que proporcionan el servicio de internet. La compañía $A$ proporciona servicio al 70% de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65% de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía $B$ ha contratado televisión de pago.

a) Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía $A$. *(3 puntos)*

b) Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía $B$? *(4 puntos)*

c) Sea $A$ el suceso "ser cliente de la compañía $A$" y $C$ el suceso "haber contratado la televisión de pago". Calcula $P(A \cup C)$. *(3 puntos)*

Llamamos A = "Tener contratado el servicio de internet con la compañía A", B = "Tener contratado el servicio de internet con la compañía B" y C = "Tener contratada la televisión de pago".

Hacemos una tabla de contingencia para obtener de forma rápida todos los datos necesarios para responder a las preguntas del ejercicio.

| | Televisión de pago | Sin televisión de pago | |
|---|---|---|---|
| Internet con A | | | **70** |
| Internet con B | | | **30** |
| Totales | **65** | | **100** |

La mitad de los clientes de la compañía $B$ (30%) ha contratado televisión de pago → 15% de las personas con conexión a internet están con la compañía B y con televisión de pago. Completamos la tabla.

| | Televisión de pago (C) | Sin televisión de pago | |
|---|---|---|---|
| Internet con A | **50** | **20** | **70** |
| Internet con B | **15** | **15** | **30** |
| Totales | **65** | **35** | **100** |

a) Representan un 20% de las personas con contrato de internet.

| | Televisión de pago | Sin televisión de pago | |
|---|---|---|---|
| Internet con A | 50 | 20 | 70 |
| Internet con B | 15 | 15 | 30 |
| Totales | 65 | 35 | 100 |

b) Nos piden $P\left(B/\overline{C}\right)$

$$P\left(B/\overline{C}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)}=\frac{15}{35}=\boxed{\frac{3}{7}\simeq 0.4286}$$

c)

$$P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)=\frac{70}{100}+\frac{65}{100}-\frac{50}{100}=\frac{85}{100}=\boxed{0.85}$$