COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2023	CONVOCATORIA: JUNIO 2023
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: **Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos.** Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? *(8 puntos)*

b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar? *(2 puntos)*

Problema 2. Una matriz A se denomina normal si $A^tA = AA^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. *(4 puntos)*

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $AX = B^tX - C$, donde

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$. *(6 puntos)*

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Problema 4. Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1 200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

a) ¿A cuánto asciende el recibo de un mes de la empresa si ese mes consumió 400 kWh? *(2 puntos)*
b) Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. Dibuja su gráfica. *(5 puntos)*
c) Otra pequeña empresa, con la misma cuota fija, paga todos los kWh a 3 euros. ¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan? En caso afirmativo indica cuál será en ese mes el consumo y el importe del recibo de ambas empresas. *(3 puntos)*

Problema 5. Arsenio Lupin ha descubierto que la alarma del Banco de París no se puede desconectar. No obstante, ha averiguado que la probabilidad de que la alarma suene cuando hay un motivo justificado es 0,95 y que la probabilidad de que suene injustificadamente es 0,3. El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París y se sabe que nadie más lo atracará ese día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París ese día y que no suene la alarma? *(4 puntos)*
b) Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París? *(3 puntos)*
c) Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París? *(3 puntos)*

Problema 6. Se sabe que el 60% de los clientes de una agencia de viajes realiza un viaje al año, el 30% realiza dos viajes al año, y el 10% restante realiza tres o más viajes al año. Se sabe también que hay un 54% de clientes que están casados y realizan un viaje al año, que hay un 14% de clientes que están casados y realizan dos viajes al año, y que hay un 2% de clientes que están casados y realizan tres o más viajes al año. Seleccionamos al azar un cliente de la agencia.

a) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado? *(3 puntos)*
b) Llamemos G al suceso "el cliente seleccionado no está casado" y H al suceso "el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año". Calcula $P(G \cup H)$. *(3 puntos)*
c) Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes? *(4 puntos)*

Soluciones

Problema 1. El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas *A* y *B* de comida para perros. Una lata de la marca *A* contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca *B* contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca *A* cuesta 10 euros y la lata de la marca *B* cuesta 16 euros.
a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? *(8 puntos)*
b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar? *(2 puntos)*

a) Llamamos "x" al número de latas marca A e "y" al número de latas marca B.
Hacemos una tabla para ordenar toda la información del ejercicio.

	Hidratos de carbono	Proteínas	Grasas	Coste
Nº latas A (x)	4x	6x	x	10x
Nº latas B (y)	2y	20y	12y	16y
TOTALES	$4x+2y$	$6x+20y$	$x+12y$	$10x+16y$

La función objetivo que deseamos minimizar es el coste: $C(x,y)=10x+16y$.

Las restricciones del problema son:

"Mi perro debe tomar diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas" → $4x+2y\geq 8;\ 6x+20y\geq 46;\ x+12y\geq 12$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 4x+2y\geq 8 \\ 6x+20y\geq 46 \\ x+12y\geq 12 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y\geq 4 \\ 3x+10y\geq 23 \\ x+12y\geq 12 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Para representar la región factible empezamos dibujando las rectas que la delimitan:

$2x+y=4$

x	$y=4-2x$
0	4
1	2
2	0

$3x+10y=23$

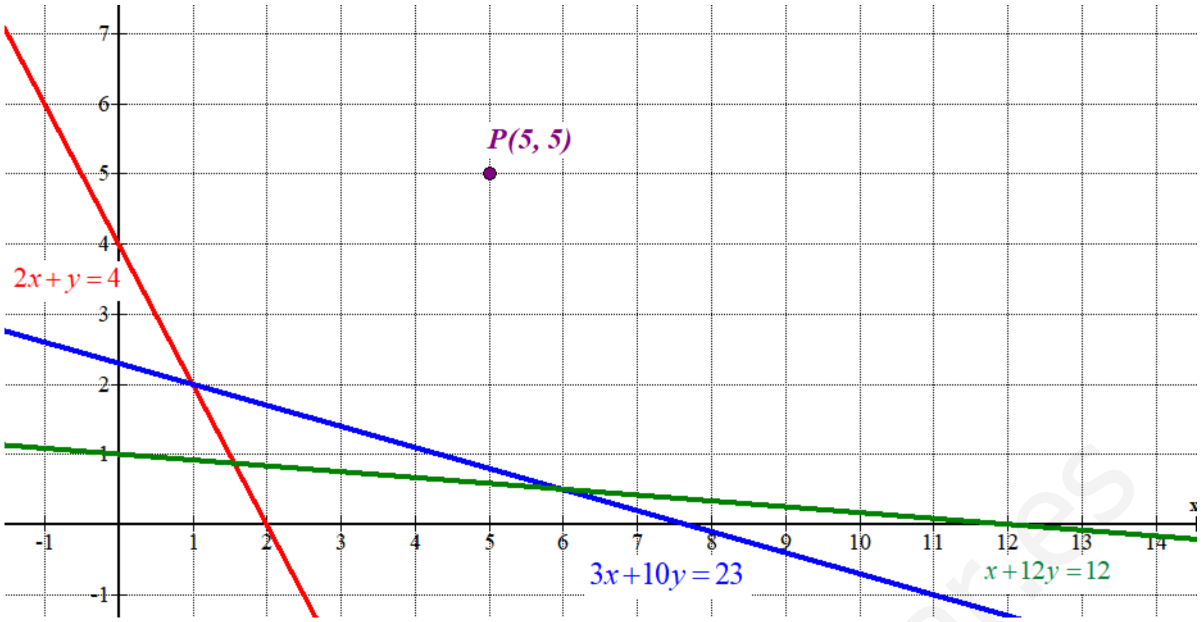
x	$y=\frac{23-3x}{10}$
1	2
6	0.5
7	0.2

$x+12y=12$

x	$y=\frac{12-x}{12}$
0	1
6	0.5
12	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

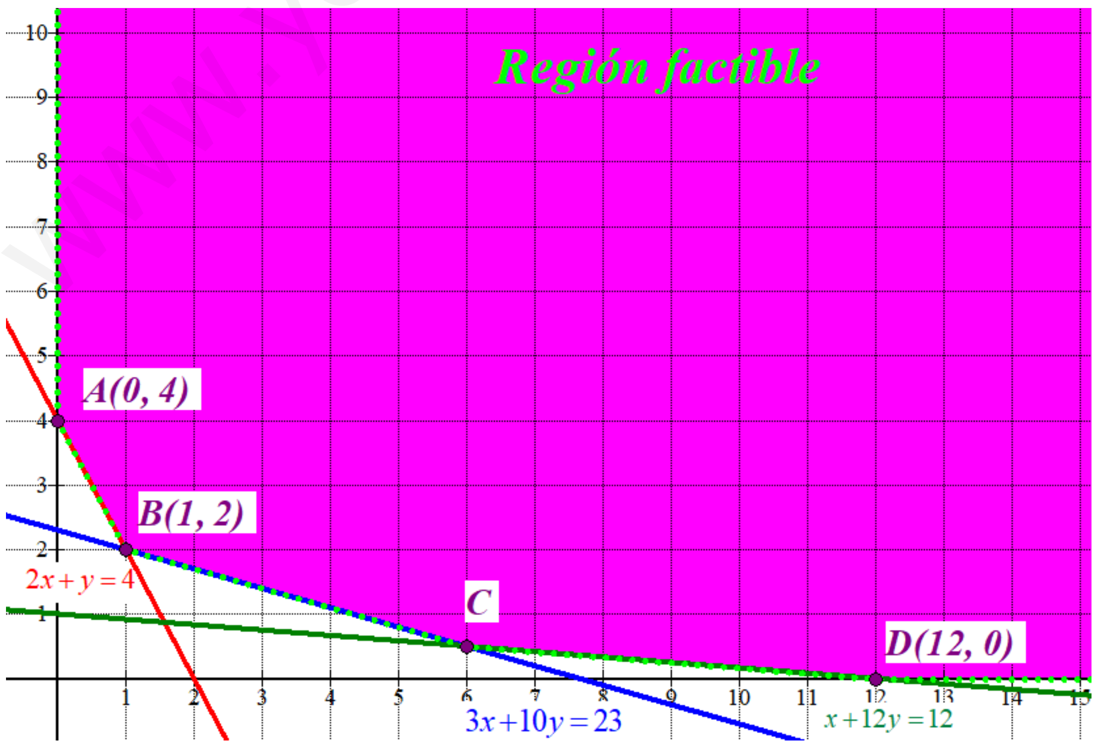


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+y\geq 4 \\ 3x+10y\geq 23 \\ x+12y\geq 12 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de las rectas roja, verde y azul.

Comprobamos que el punto P(5, 5) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 5+5\geq 4 \\ 3\cdot 5+10\cdot 5\geq 23 \\ 5+12\cdot 5\geq 12 \\ 5\geq 0;\ 5\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas del vértice C.

$$C \to \left.\begin{matrix} 3x+10y=23 \\ x+12y=12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x+10y=23 \\ x=12-12y \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3(12-12y)+10y=23 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36-36y+10y=23 \Rightarrow -26y=-13 \Rightarrow y=\frac{13}{26}=0.5 \Rightarrow x=12-6=6 \Rightarrow \boxed{C(6,0.5)}$$

Valoramos la función coste $C(x,y)=10x+16y$ en cada uno de los vértices en busca del coste mínimo. Al ser una región no acotada valoramos el coste en dos puntos R y Q lejanos.

R(0,100) → $C(0,100)=1600$

A(0, 4) → $C(0,4)=0+64=64$

B(1, 2) → $C(1,2)=10+32=42$ ¡Mínimo!

C(6, 0.5) → $C(6,0.5)=60+8=68$

D(12, 0) → $C(12,0)=120+0=120$

Q(100, 0) → $C(100,0)=1000$

El coste mínimo es de 42 € y se produce en el vértice B(1, 2).
Con 1 lata de la marca A y 2 latas de la marca B se satisfacen las necesidades del perro con un coste mínimo de 42 €.

b) El precio mínimo que debo pagar es de 42 €.

Problema 2. Una matriz A se denomina normal si $A^tA = AA^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. *(4 puntos)*

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $AX = B^tX - C$, donde

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$. *(6 puntos)*

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

$$A^tA = AA^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4+1 & 2-x \\ 2-x & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & -2+x \\ -2+x & 1+x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5=5 \\ 2-x=-2+x \\ 2-x=-2+x \\ 1+x^2=1+x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-x=-2+x \Rightarrow 4=2x \Rightarrow \boxed{x=2}$$

La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ es normal si $x = 2$.

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX = B^tX - C \Rightarrow AX - B^tX = -C \Rightarrow B^tX - AX = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(B^t - A\right)X = C \Rightarrow X = \left(B^t - A\right)^{-1}C$$

Comprobamos que la matriz $\left(B^t - A\right)$ tiene inversa y la calculamos.

$$B^t - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(B^t - A\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(B^t - A\right)^{-1} = \frac{Adj\left(\left(B^t - A\right)^t\right)}{\left|B^t - A\right|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituimos y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X=\left(B^t-A\right)^{-1}C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3 & 2-3\\ -1+0 & -2+0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}}$$

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

a) El dominio de la función racional son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$2x^2-3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)(-2)}}{2(2)}=\frac{3\pm 5}{4}=\begin{cases}\dfrac{3+5}{4}=\boxed{2=x}\\ \dfrac{3-5}{4}=\boxed{\dfrac{-1}{2}=x}\end{cases}$$

Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\{-0.5,\ 2\}$.

Puntos de corte con el eje OY:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} \\ x=0\end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{0^2+2\cdot 0-15}{2\cdot 0^2-3\cdot 0-2}=7.5 \Rightarrow \boxed{A(0,7.5)}$$

Puntos de corte con el eje OX:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} \\ y=0\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=0 \Rightarrow x^2+2x-15=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-15)}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2}=\begin{cases}\dfrac{-2+8}{2}=3=x \Rightarrow \boxed{B(3,0)}\\ \dfrac{-2-8}{2}=-5=x \Rightarrow \boxed{C(-5,0)}\end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son: A(0, 7.5), B(3, 0) y C(–5, 0).

b) **Asíntota vertical.** $x=a$

¿ $x=-0.5$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -0.5} f(x)=\lim_{x\to -0.5}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\frac{(-0.5)^2+2(-0.5)-15}{2(-0.5)^2-3(-0.5)-2}=\frac{-15.75}{0}=\infty$$

$x=-0.5$ es asíntota vertical

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\frac{2^2+2(2)-15}{2(2)^2-3(2)-2}=\frac{-7}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{15}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1+\frac{2}{\infty}-\frac{15}{\infty}}{2-\frac{3}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1+0-0}{2-0-0}=\frac{1}{2}$$

$y=\frac{1}{2}$ es asíntota horizontal.

c) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x+2)(2x^2-3x-2)-(4x-3)(x^2+2x-15)}{(2x^2-3x-2)^2}=$$

$$=\frac{4x^3-6x^2-4x+4x^2-6x-4-(4x^3+8x^2-60x-3x^2-6x+45)}{(2x^2-3x-2)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{4x^3}-6x^2-4x+4x^2-\cancel{6x}-4-\cancel{4x^3}-8x^2+60x+3x^2+\cancel{6x}-45}{(2x^2-3x-2)^2}=$$

$$=\frac{-7x^2+56x-49}{(2x^2-3x-2)^2}$$

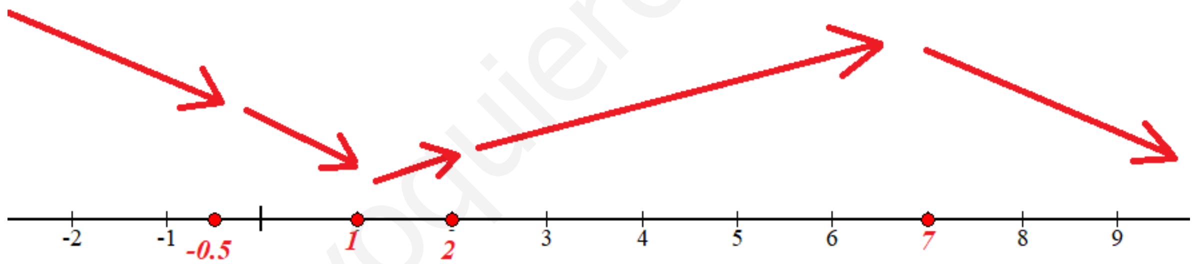
$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-7x^2+56x-49}{(2x^2-3x-2)^2}=0\Rightarrow -7x^2+56x-49=0\Rightarrow x^2-8x+7=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(7)}}{2}=\frac{8\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{8+6}{2}=\boxed{7=x}\\ \frac{8-6}{2}=\boxed{1=x}\end{cases}$$

Averiguamos el signo de la derivada antes, entre y después de –0.5 (excluido del dominio), 1 (punto crítico), 2 (excluido del dominio) y 7 (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty,-0.5)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f\,'(-1)=\dfrac{-7(-1)^2+56(-1)-49}{\left(2(-1)^2-3(-1)-2\right)^2}=\dfrac{-112}{+}<0$. La función decrece en $(-\infty,-0.5)$.
- En el intervalo $(-0.5,\,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f\,'(0)=\dfrac{-7\cdot 0^2+56\cdot 0-49}{\left(2\cdot 0^2-3\cdot 0-2\right)^2}=\dfrac{-49}{+}<0$. La función decrece en $(-0.5,\,1)$.
- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x=1.5$ y la derivada vale $f\,'(1.5)=\dfrac{-7\cdot 1.5^2+56\cdot 1.5-49}{\left(2\cdot 1.5^2-3\cdot 1.5-2\right)^2}=\dfrac{19.25}{+}>0$. La función crece en $(1,2)$.
- En el intervalo $(2,7)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f\,'(3)=\dfrac{-7\cdot 3^2+56\cdot 3-49}{\left(2\cdot 3^2-3\cdot 3-2\right)^2}=\dfrac{56}{+}>0$. La función crece en $(2,7)$.
- En el intervalo $(7,+\infty)$ tomamos $x=10$ y la derivada vale $f\,'(10)=\dfrac{-7\cdot 10^2+56\cdot 10-49}{\left(2\cdot 10^2-3\cdot 10-2\right)^2}=\dfrac{-189}{+}<0$. La función decrece en $(7,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



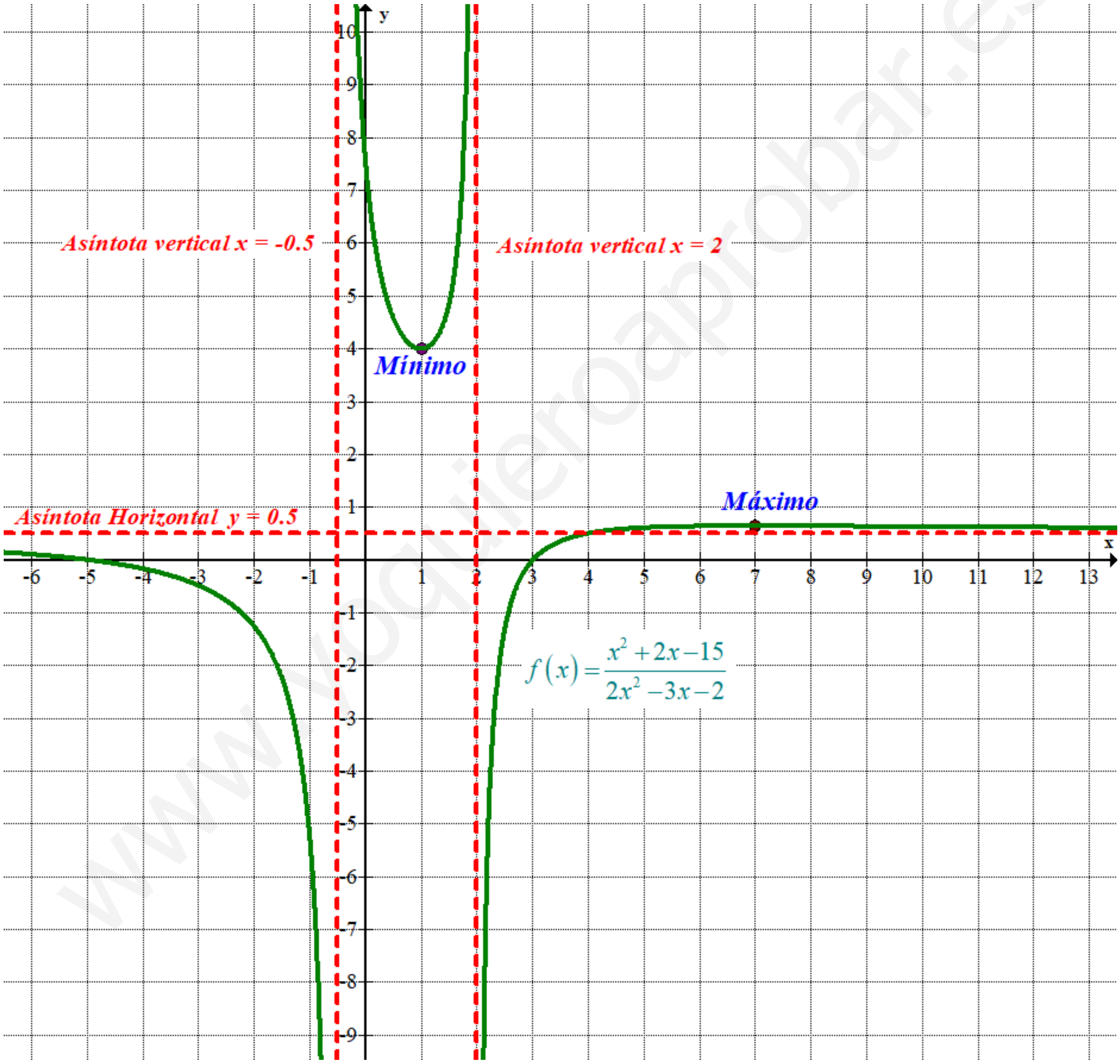
La función decrece en $(-\infty,-0.5)\cup(-0.5,1)\cup(7,+\infty)$ y crece en $(1,2)\cup(2,7)$.

d) Observando el esquema de evolución de la función podemos afirmar que la función tiene un mínimo local en $x = 1$ y un máximo local en $x = 7$.

Como $f(1)=\dfrac{1^2+2\cdot 1-15}{2\cdot 1^2-3\cdot 1-2}=\dfrac{-12}{-3}=4$ y $f(7)=\dfrac{7^2+2\cdot 7-15}{2\cdot 7^2-3\cdot 7-2}=\dfrac{48}{75}=0.64$ las coordenadas del mínimo local son (1, 4) y del máximo local son (7, 0.64)

e) Para realizar la representación gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$
-5	0
-1	-5.33
0	7.5
1	4 Mínimo
1.5	4.875
3	0
7	0.64 Máximo
10	0.625



Problema 4. Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1 200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

a) ¿A cuánto asciende el recibo de un mes de la empresa si ese mes consumió 400 kWh? *(2 puntos)*

b) Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. Dibuja su gráfica. *(5 puntos)*

c) Otra pequeña empresa, con la misma cuota fija, paga todos los kWh a 3 euros. ¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan? En caso afirmativo indica cuál será en ese mes el consumo y el importe del recibo de ambas empresas. *(3 puntos)*

a) Ese mes pagó la cuota fija de 1200 €, pagó los primeros 250 kwh a razón de 5 € por kwh, los restantes 150 kwh los pagó a razón de 3 € cada kwh, por lo que su factura fue de un importe de $1200+250\cdot 5+150\cdot 3=2900€$.

b) Llamamos *I(x)* al importe a pagar en el mes que se consumen *x* kwh. Es una función a trozos pues se paga según los tramos de variación de la *x*.

$$I(x)=\begin{cases}1200+5x & si \quad 0\le x\le 250\\ 1200+5(250)+3(x-250) & si \quad 250<x\le 900\\ 1200+5(250)+3(650)+2(x-900) & si \quad x>900\end{cases}$$

Si simplificamos tenemos la función:

$$I(x)=\begin{cases}1200+5x & si \quad 0\le x\le 250\\ 1700+3x & si \quad 250<x\le 900\\ 2600+2x & si \quad x>900\end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para cada trozo de recta y dibujamos su gráfica.

$0\le x\le 250$

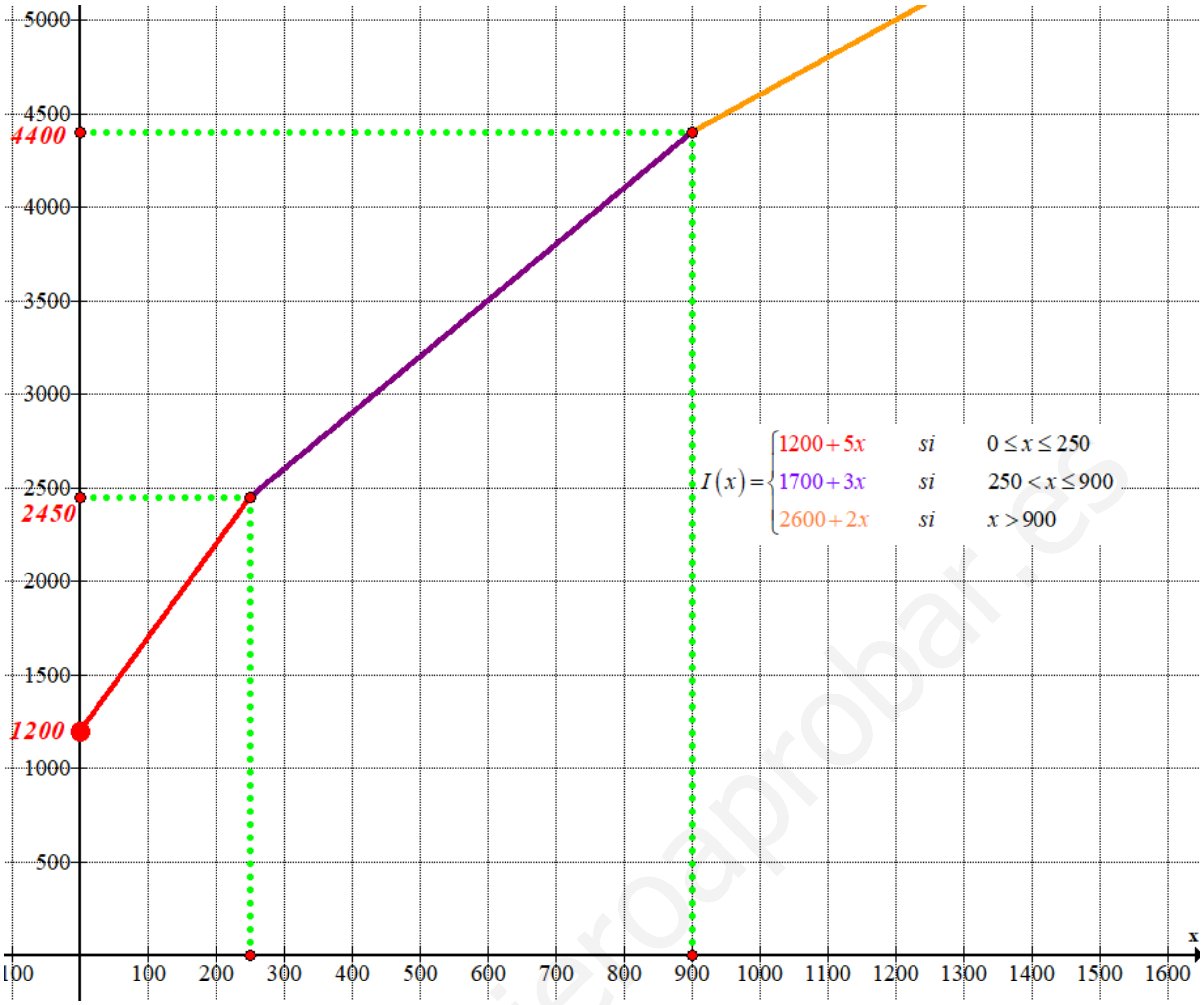
x	$y=1200+5x$
0	1200
250	2450

$250<x\le 900$

x	$y=1700+3x$
300	2600
900	4400

$x>900$

x	$y=2600+2x$
1000	4600
1100	4800



c) La otra empresa cobra por x kwh un importe de $J(x)=1200+3x$.

Averiguamos que mes se pagaría lo mismo con cualquiera de las dos empresas.

$$I(x)=J(x)\Rightarrow\begin{cases} si\ \ 0\le x\le 250\to 1200+5x=1200+3x\to 5x=3x\to \boxed{x=0}\\ si\ \ 250<x\le 900\to 1700+3x=1200+3x\to 500=0\to \text{¡No es posible!}\\ si\ \ x>900\to 2600+2x=1200+3x\to \boxed{1400=x}\end{cases}$$

Se pagaría el mismo importe en la factura con las dos empresas cuando el consumo es de 0 kwh o de 1400 kwh.

Cuando el consumo es de 1400 kwh se paga una factura en las dos empresas por un importe de 5400 €.

$$\left.\begin{array}{l} J(1440)=1200+3\cdot 1400=5400\ € \\ I(1440)=2600+2\cdot 1400=5400\ € \end{array}\right\}\Rightarrow J(1440)=I(1440)=5400\ €$$

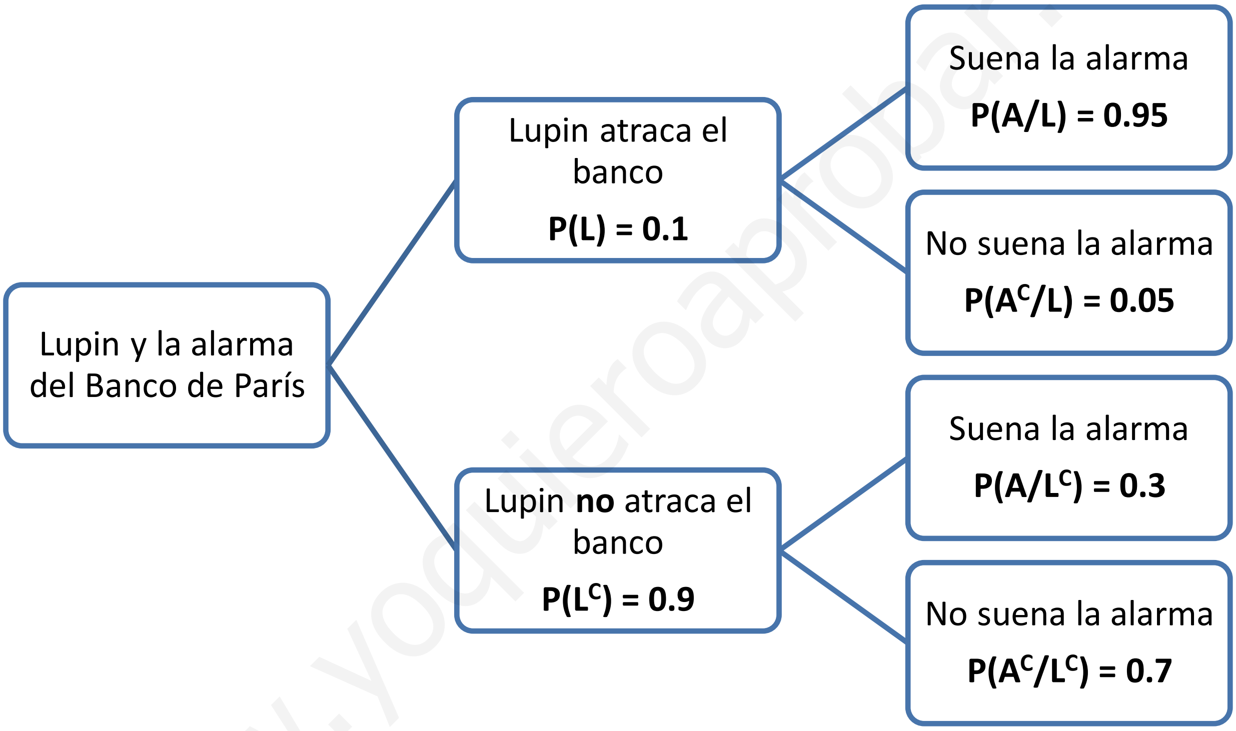
Problema 5. Arsenio Lupin ha descubierto que la alarma del Banco de París no se puede desconectar. No obstante, ha averiguado que la probabilidad de que la alarma suene cuando hay un motivo justificado es 0,95 y que la probabilidad de que suene injustificadamente es 0,3. El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París y se sabe que nadie más lo atracará ese día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París ese día y que no suene la alarma? *(4 puntos)*

b) Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París? *(3 puntos)*

c) Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París? *(3 puntos)*

a) Llamamos L al suceso "Arsenio Lupin atraca el banco el 31 de diciembre" y A al suceso "La alarma suena".
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(L \cap A^C\right)$.

$$P\left(L \cap A^C\right) = P(L)P\left(A^C / L\right) = 0.1 \cdot 0.05 = \boxed{0.005}$$

b) Nos piden calcular $P\left(L^C / A\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P\left(L^C / A\right) = \frac{P\left(L^C \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left(L^C\right)P\left(A / L^C\right)}{P(L)P(A/L) + P\left(L^C\right)P\left(A/L^C\right)} =$$

$$= \frac{0.9 \cdot 0.3}{0.1 \cdot 0.95 + 0.9 \cdot 0.3} = \boxed{\frac{54}{73} \simeq 0.7397}$$

c) Nos piden calcular $P\left(L/A^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P\left(L/A^C\right)=\frac{P\left(L\cap A^C\right)}{P\left(A^C\right)}=\frac{P(L)P\left(A^C/L\right)}{P(L)P\left(A^C/L\right)+P\left(L^C\right)P\left(A^C/L^C\right)}=$$

$$=\frac{0.1\cdot 0.05}{0.1\cdot 0.05+0.9\cdot 0.7}=\boxed{\frac{1}{127}\simeq 0.0079}$$

Problema 6. Se sabe que el 60% de los clientes de una agencia de viajes realiza un viaje al año, el 30% realiza dos viajes al año, y el 10% restante realiza tres o más viajes al año. Se sabe también que hay un 54% de clientes que están casados y realizan un viaje al año, que hay un 14% de clientes que están casados y realizan dos viajes al año, y que hay un 2% de clientes que están casados y realizan tres o más viajes al año. Seleccionamos al azar un cliente de la agencia.
a) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado? *(3 puntos)*
b) Llamemos G al suceso "el cliente seleccionado no está casado" y H al suceso "el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año". Calcula $P(G \cup H)$. *(3 puntos)*
c) Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes? *(4 puntos)*

Llamamos U = "Hacer un viaje al año", D = "Hacer dos viajes al año", T = "Hacer tres o más viajes al año" y C = "Estar casado".
Los datos proporcionados son $P(U)=0.60$, $P(D)=0.30$, $P(T)=0.10$, $P(U \cap C)=0.54$, $P(C \cap D)=0.14$, $P(C \cap T)=0.02$.
Hacemos una tabla de contingencia para obtener de forma rápida todos los datos necesarios para responder a las preguntas del ejercicio.

	Casado	No casado	
Un viaje	**54**		**60**
Dos viajes	**14**		**30**
Tres viajes o más	**2**		**10**
Totales			**100**

Completamos la tabla.

	Casado	No casado	
Un viaje	**54**	**6**	**60**
Dos viajes	**14**	**16**	**30**
Tres viajes o más	**2**	**8**	**10**
Totales	**70**	**30**	**100**

a) Nos piden calcular $P\left(\overline{C}/\left(D \cup T\right)\right)$. Mirando la tabla sabemos que de cada 30 clientes que hacen 2 viajes hay 16 que no están casados y de cada 10 clientes que hacen 3 viajes hay 8 que no están casados.

$$P\left(\overline{C}/\left(D \cup T\right)\right)=\frac{16+8}{30+10}=\frac{3}{5}=0.6=60\%$$

b) El suceso G = $\overline{C}$ y $H=U \cup D$. Nos piden calcular $P\left(\overline{C} \cup \left(U \cup D\right)\right)$. Sabemos que de cada 100 clientes hay 30 no casados, 54 casados que hacen 1 viaje y 14 casados que hacen dos viajes.

$$P\left(G \cup H\right)=P\left(\overline{C} \cup \left(U \cup D\right)\right)=\frac{30+54+14}{100}=0.98$$

c) El suceso $J = C$ y el suceso $K=U \cup T$. Para que J y K sean independientes debe cumplirse que $P\left(J \cap K\right)=P\left(J\right)P\left(K\right)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(J\cap K)=P\left[C\cap(U\cup T)\right]=\dfrac{54+2}{100}=0.54 \\ P(J)P(K)=P(C)P(U\cup T)=\dfrac{70}{100}\cdot\dfrac{60+10}{100}=0.49 \end{array}\right\}\Rightarrow P(J\cap K)=0.54\neq 0.49=P(J)P(K)$$

Los sucesos J y K no son independientes.