

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2022-2023

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II



Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ 3ax + a^2y - 2a^2z = 3 \\ -ax - y + (a^2 - 1)z = a + \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula el valor de a para que la siguiente matriz no sea regular

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-3, -2, 3)$ y que corta a las rectas r y s , siendo

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1}$$

(2.5 puntos)

P4) Halla el plano paralelo a r y s que se encuentra a $3u$ de r y $6u$ de s siendo

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1}$$

(2,5 puntos)

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto $x = 0$.

a) $f(x) = \ln[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}]$

(1.25 puntos)

b) $g(x) = \arctan \sqrt{1+2x+e^{2x}}$

(1.25 puntos)

P6) Se considera la función $f(x) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}{x^2 - 6x + 10}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[1, 4]$. (0,75 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores α y β en el intervalo $(1, 4)$ tales que $f(\alpha) = \frac{-1}{2} = f(\beta)$.

Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.75 puntos)

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$.

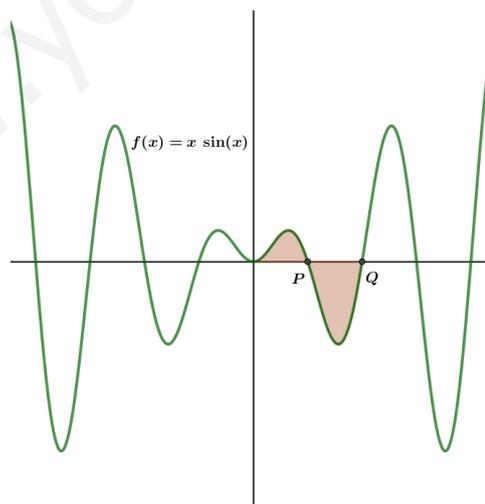
a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[7, 11]$ y derivable en $(7, 11)$.

(1.25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (7, 11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

P8) La curva de la imagen corresponde a la función $f(x) = x \cdot \sin x$. Tal y como se intuye, la curva corta el eje OX en infinitos puntos:



Encuentra los puntos P y Q, y, a continuación, calcula el área de la región del plano sombreada.

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} ax + y - 2z = 0 \\ 3ax + a^2y - 2a^2z = 3 \\ -ax - y + (a^2 - 1)z = a + \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 3a & a^2 & -2a^2 \\ -a & -1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 3a & a^2 & -2a^2 & 3 \\ -a & -1 & a^2 - 1 & a + \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$\begin{aligned} A/B &= \begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 3a & a^2 & -2a^2 & 3 \\ -a & -1 & a^2 - 1 & a + \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - 3 \cdot \text{Fila 1}^a \\ \hline 3a \quad a^2 \quad -2a^2 \quad 3 \\ -3a \quad -3 \quad 6 \quad -3 \\ \hline 0 \quad a^2 - 3 \quad -2a^2 + 6 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila 2}^a \end{array} \right\} \\ &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 1}^a \\ \hline -a \quad -1 \quad a^2 - 1 \quad a + \sqrt{3} - 1 \\ a \quad 1 \quad -2 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad a^2 - 3 \quad a + \sqrt{3} \rightarrow \text{Nueva fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 0 & a^2 - 3 & -2a^2 + 6 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - 3 & a + \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 0 & a^2 - 3 & -2a^2 + 6 \\ 0 & 0 & a^2 - 3 \end{vmatrix} = a(a^2 - 3)(a^2 - 3)$$

Se anula cuando $\begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 3 = 0 \rightarrow a^2 = 3 \rightarrow a = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$, $a \neq -\sqrt{3}$ y $a \neq +\sqrt{3}$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\left. \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc} a & 1 & -2 & 1 \\ 0 & a^2-3 & -2a^2+6 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-3 & a+\sqrt{3} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} ax+y-2z=1 \\ (a^2-3)y+(-2a^2+6)z=0 \\ (a^2-3)z=a+\sqrt{3} \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \{a \neq \pm\sqrt{3}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} ax+y-2z=1 \\ (a^2-3)y-2(a^2-3)z=0 \\ \boxed{z = \frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} ax+y-2\frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}=1 \\ (a^2-3)y-2\cancel{(a^2-3)}\frac{a+\sqrt{3}}{\cancel{a^2-3}}=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} ax+y=1+\frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2-3} \\ (a^2-3)y-2(a+\sqrt{3})=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} ax+y=1+\frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2-3} \\ (a^2-3)y=2(a+\sqrt{3}) \rightarrow \boxed{y = \frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2-3}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax + \frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2-3} = 1 + \frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2-3} \Rightarrow ax = 1 \Rightarrow \{a \neq 0\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{a}}$$

Simplificamos las soluciones.

$$z = \frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3} = \frac{a+\sqrt{3}}{(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})} = \frac{1}{a-\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{2(a+\sqrt{3})}{a^2-3} = \frac{2}{a-\sqrt{3}}$$

La solución es $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{2}{a-\sqrt{3}}$, $z = \frac{1}{a-\sqrt{3}}$

CASO 2. $a = 0$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

El rango de A es 2 pues tiene la primera columna nula. Comprobamos que el rango de A/B es 3 tomando el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 6\sqrt{3} + 9 + 6\sqrt{3} \neq 0$$

El rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

CASO 3. $a = \sqrt{3}$

La matriz ampliada queda:

$$A/B = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{\sqrt{3} & 1 & -2 & 1}^{A/B} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_A & 2\sqrt{3} \end{array} \right)$$

Por lo que el rango de A es 1 y el de la ampliada A/B es 2. Los rangos son distintos. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 4. $a = -\sqrt{3}$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 1 y el de la ampliada también es 1, pero es menor que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Lo resolvemos.

$$-\sqrt{3}x + y - 2z = 1 \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 2z + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \sqrt{3}\alpha + 2\beta + 1, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = \beta \end{cases}$$

Resumiendo: Si $a \neq 0$, $a \neq -\sqrt{3}$ y $a \neq +\sqrt{3}$ el sistema es compatible determinado siendo su solución $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{2}{a - \sqrt{3}}$, $z = \frac{1}{a - \sqrt{3}}$. Si $a = \sqrt{3}$ o $a = 0$ el sistema es incompatible. Si

$a = -\sqrt{3}$ el sistema es compatible indeterminado con soluciones $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \sqrt{3}\alpha + 2\beta + 1, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = \beta \end{cases}$.

P2) Calcula el valor de a para que la siguiente matriz no sea regular

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Para que la matriz sea no regular su determinante debe ser nulo.
Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left. \begin{array}{l} \text{Columna } 4^{\text{a}} - \text{Columna } 3^{\text{a}} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ a+3 & -1 & a+2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Nueva Columna } 4^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & a+2 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{Desarrollo por la } 4^{\text{a}} \text{ columna}\} =$$

$$= (a+2) \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (a+2)(-6-8+0-2+12-0) = -4(a+2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -4(a+2) = 0 \Rightarrow a+2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

La matriz A es no regular cuando $a = -2$.

P3) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-3, -2, 3)$ y que corta a las rectas r y s , siendo

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1}$$

(2.5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + z + 1 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow -y + z + 1 - y + 2z + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y + 3z + 2 = 0 \Rightarrow -2y = -3z - 2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}z + 1} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}z - 1 + z + 1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}z} \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\alpha \\ y = 1 + \frac{3}{2}\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right) \\ P_r(0, 1, 0) \end{cases} \rightarrow \vec{w}_r = (-1, 3, 2)$$

$$s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (-1, 2, 1) \\ Q_s(3, -5, -3) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -5 + 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

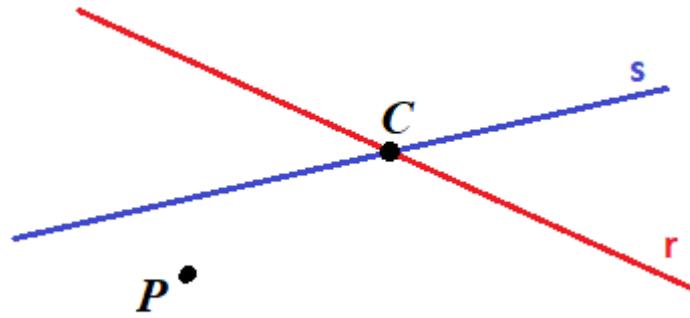
$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_r = (-1, 3, 2) \\ \vec{v}_s = (-1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{2}{1}$$

Las rectas son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores \vec{w}_r , \vec{v}_s y el vector $\vec{P_rQ_s}$.

$$\vec{P_rQ_s} = (3, -5, -3) - (0, 1, 0) = (3, -6, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_r = (-1, 3, 2) \\ \vec{v}_s = (-1, 2, 1) \\ \vec{P_rQ_s} = (3, -6, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{w}_r, \vec{v}_s, \vec{P_rQ_s}] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 9 + 12 - 12 - 9 - 6 = 0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan.



La recta t que nos piden que hallemos pasa por el punto de corte de las rectas y por el punto $P(-3, -2, 3)$.

Hallamos el punto C de corte de las rectas.

$$\begin{aligned}
 s &\equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = -5 + 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \\
 r &\equiv \begin{cases} x = \frac{-1}{2}\alpha \\ y = 1 + \frac{3}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{cases} 3 - \lambda = \frac{-1}{2}\alpha \\ -5 + 2\lambda = 1 + \frac{3}{2}\alpha \\ -3 + \lambda = \alpha \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases} 3 - \lambda = \frac{-1}{2}(\lambda - 3) \\ -5 + 2\lambda = 1 + \frac{3}{2}(\lambda - 3) \end{cases}
 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow
 \begin{cases} 6 - 2\lambda = -\lambda + 3 \\ -10 + 4\lambda = 2 + 3\lambda - 9 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases} 3 = \lambda \\ \lambda = 3 \end{cases}
 \Rightarrow
 \begin{cases} x = 3 - 3 = 0 \\ y = -5 + 6 = 1 \\ z = -3 + 3 = 0 \end{cases}
 \Rightarrow C(0, 1, 0)$$

Escribimos la ecuación continua de la recta t .

$$\left. \begin{aligned} \overline{PC} &= (0, 1, 0) - (-3, -2, 3) = (3, 3, -3) \rightarrow \vec{v}_t = (1, 1, -1) \\ P(-3, -2, 3) &\in t \end{aligned} \right\} \Rightarrow t \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

P4) Halla el plano paralelo a r y s que se encuentra a $3u$ de r y $6u$ de s siendo

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1}.$$

(2,5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2z + 7 = y \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x + 2(2x + 2z + 7) + 2z - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + 4x + 4z + 14 + 2z - 2 = 0 \Rightarrow 9x + 6z + 12 = 0 \Rightarrow 3x + 2z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = -4 - 2z \Rightarrow \boxed{x = \frac{-4}{3} - \frac{2}{3}z} \Rightarrow y = 2\left(\frac{-4}{3} - \frac{2}{3}z\right) + 2z + 7 = \frac{-8}{3} - \frac{4}{3}z + 2z + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{13}{3} + \frac{2}{3}z} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \frac{-4}{3} - \frac{2}{3}\alpha \\ y = \frac{13}{3} + \frac{2}{3}\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) \rightarrow \vec{w}_r = (-2, 2, 3) \\ \alpha = 1 \rightarrow P_r(-2, 5, 1) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{v}_s = (2, 0, -1) \\ Q_s(1, -3, 5) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 \\ z = 5 - \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_r = (-2, 2, 3) \\ \vec{v}_s = (2, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{2} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{3}{-1}$$

Las rectas son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores \vec{w}_r , \vec{v}_s y el vector $\overrightarrow{P_r Q_s}$.

$$\overrightarrow{P_r Q_s} = (1, -3, 5) - (-2, 5, 1) = (3, -8, 4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_r = (-2, 2, 3) \\ \vec{v}_s = (2, 0, -1) \\ \overrightarrow{P_r Q_s} = (3, -8, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{w}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 6 - 48 - 0 - 16 + 16 = -54 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

El plano paralelo a r y s tiene como vector normal el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w}_r = (-2, 2, 3) \\ \vec{v}_s = (2, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} = \vec{w}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 6j - 4k - 2j = -2i + 4j - 4k = (-2, 4, -4)$$

Hallamos la ecuación de los planos paralelos a las rectas r y s . Tomaremos como vector normal del plano el obtenido con el producto vectorial pero dividido por 2.

$$\vec{n} = (-1, 2, -2) \Rightarrow \pi: -x + 2y - 2z + D = 0$$

Le aplicamos que se encuentra a $3u$ de r y $6u$ de s . También sabemos que las rectas y el plano son paralelos, por lo que la distancia de cualquiera de las rectas al plano es la distancia de uno de sus puntos al plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -x + 2y - 2z + D = 0 \\ P_r(-2, 5, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|2 + 10 - 2 + D|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|10 + D|}{3}$$

$$d(r, \pi) = 3 \Rightarrow \frac{|10 + D|}{3} = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{10 + D}{3} = 3 \rightarrow 10 + D = 9 \rightarrow \boxed{D = -1} \\ \frac{10 + D}{3} = -3 \rightarrow 10 + D = -9 \rightarrow D = -19 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -x + 2y - 2z + D = 0 \\ Q_s(1, -3, 5) \end{array} \right\} \Rightarrow d(s, \pi) = d(Q_s, \pi) = \frac{|-1 - 6 - 10 + D|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-17 + D|}{3}$$

$$d(s, \pi) = 6 \Rightarrow \frac{|-17 + D|}{3} = 6 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-17 + D}{3} = 6 \rightarrow -17 + D = 18 \rightarrow D = 35 \\ \frac{-17 + D}{3} = -6 \rightarrow -17 + D = -18 \rightarrow \boxed{D = -1} \end{cases}$$

Las dos condiciones se cumplen simultáneamente para $D = -1$, por lo que el plano buscado tiene ecuación $\pi: -x + 2y - 2z - 1 = 0$.

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto $x = 0$.

a) $f(x) = \ln[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}]$

(1.25 puntos)

b) $g(x) = \arctan \sqrt{1+2x+e^{2x}}$

(1.25 puntos)

a)

$$f'(x) = \frac{[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}]'}{\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}} = \frac{-\pi \operatorname{sen}(\pi x) e^{x^2+2x} + \cos(\pi x)(2x+2)e^{x^2+2x}}{\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}}$$

$$f'(x) = \frac{-\pi \operatorname{sen}(\pi x) e^{x^2+2x} + (2x+2)\cos(\pi x) e^{x^2+2x}}{\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}}$$

$$f'(0) = \frac{-\pi \operatorname{sen}(0) e^{0^2+0} + (0+2)\cos(0) e^{0^2+0}}{\cos(0) \cdot e^{0^2+0}} = \frac{0+2}{1} = 2$$

OTRA FORMA DE HACERLO

$$f(x) = \ln[\cos(\pi x) \cdot e^{x^2+2x}] = \ln[\cos(\pi x)] + \ln[e^{x^2+2x}] = \ln[\cos(\pi x)] + x^2 + 2x$$

$$f'(x) = \frac{-\pi \operatorname{sen}(\pi x)}{\cos(\pi x)} + 2x + 2 = 2x + 2 - \pi \operatorname{tg}(\pi x)$$

$$f'(0) = 2 \cdot 0 + 2 - \pi \operatorname{tg}(\pi \cdot 0) = 0 + 2 - \pi \cdot 0 = 2$$

a)

$$g'(x) = \frac{(\sqrt{1+2x+e^{2x}})'}{1+(\sqrt{1+2x+e^{2x}})^2} = \frac{2+2e^{2x}}{1+1+2x+e^{2x}} = \frac{2+2e^{2x}}{2(2+2x+e^{2x})\sqrt{1+2x+e^{2x}}}$$

$$g'(x) = \frac{1+e^{2x}}{(2+2x+e^{2x})\sqrt{1+2x+e^{2x}}}$$

$$g'(0) = \frac{1+e^0}{(2+0+e^0)\sqrt{1+0+e^0}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

P6) Se considera la función $f(x) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}{x^2 - 6x + 10}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[1,4]$. (0,75 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores α y β en el intervalo $(1, 4)$ tales que $f(\alpha) = \frac{-1}{2} = f(\beta)$.

Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.75 puntos)

La función $\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]$ es composición de funciones continuas, el único problema es cuando se anula el denominador y si eso ocurre en el intervalo $[1,4]$.

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \nexists$$

El denominador nunca se anula y por tanto la función es continua.

b) Usaremos el teorema de Darboux:

Sea f continua en $[a, b]$ y sea m tal que $f(a) < m < f(b)$ entonces existe un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = m$.

En el intervalo $[1,4]$ buscamos valores de la función con distinto signo.

$$f(1) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-1)\right]}{1^2 - 6 + 10} = \frac{1}{5} \qquad f(2) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(2-1)\right]}{2^2 - 12 + 10} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f(3) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(3-1)\right]}{3^2 - 18 + 10} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad f(4) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(4-1)\right]}{4^2 - 24 + 10} = \frac{0}{2} = 0$$

Consideramos la función $g(x) = -f(x)$. Así $g(2) = 0$ y $g(3) = 1$.

La función $g(x)$ es continua en el intervalo $[2,3]$ y se cumple que $g(2) = 0 < \frac{1}{2} < 1 = g(3)$

aplicando el teorema de Darboux existe $\alpha \in (2,3)$ tal que $g(\alpha) = \frac{1}{2}$.

Esto implica que existe $\alpha \in (2,3)$ tal que $f(\alpha) = -\frac{1}{2}$.

Como la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[3,4]$ y se cumple que $f(3) < -\frac{1}{2} < f(4)$

aplicando el teorema de Darboux existe $\beta \in (3,4)$ tal que $f(\beta) = -\frac{1}{2}$.

Como los valores α y β pertenecen a intervalos distintos son valores diferentes y pertenecientes al intervalo $(1,4)$.

Existen $\alpha, \beta \in (1,4)$ tales que $f(\alpha) = \frac{-1}{2} = f(\beta)$.

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[7,11]$ y derivable en $(7, 11)$.

(1,25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (7,11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

a) La función es suma y composición de funciones continuas.

Solo falta comprobar que el radicando es positivo en el intervalo $[7,11]$.

$$x \in [7,11] \Rightarrow 7 \leq x \leq 11 \Rightarrow \frac{7\pi}{6} \leq \frac{\pi x}{6} \leq \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \pi \leq \frac{7\pi}{6} \leq \frac{\pi x}{6} \leq \frac{11\pi}{6} \leq 2\pi \Rightarrow$$

$$\frac{\pi x}{6} \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) < 0 \Rightarrow -\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) > \frac{1}{2} > 0}$$

La función es continua en $[7,11]$.

$$\text{La derivada de la función es } f'(x) = \frac{0 - \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}} = \frac{-\pi \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)}{12\sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}}$$

Esta derivada existe en el intervalo $[7,11]$ pues hemos comprobado que el denominador nunca se anula.

La función es derivable en $(7,11)$

b) Utilizamos el teorema de Rolle:

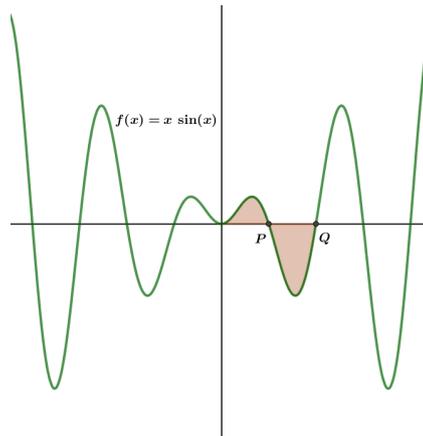
Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) siendo $f(a) = f(b)$ entonces existe $\alpha \in (a,b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

Consideramos la función $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)}$, que es continua en $[7,11]$ y derivable en $(7,11)$

$$\text{, como } \left. \begin{array}{l} f(7) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = 1 \\ f(11) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(7) = f(11) = 1.$$

Aplicando el teorema de Rolle existe $\alpha \in (7,11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

P8) La curva de la imagen corresponde a la función $f(x) = x \cdot \sin x$. Tal y como se intuye, la curva corta el eje OX en infinitos puntos:



Encuentra los puntos P y Q, y, a continuación, calcula el área de la región del plano sombreada. (2.5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX .

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x \cdot \sin x \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot \sin x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sin x = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pi; x = 2\pi; \dots \end{cases} \Rightarrow P(\pi, 0); Q(2\pi, 0)$$

El área la calculamos en dos partes que luego sumaremos.

El área entre $x = 0$ y $x = \pi$.

Calculamos primero la primitiva de la función.

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \sin x dx = \left. \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + K$$

Calculamos el área como la integral definida de la función entre $x = 0$ y $x = \pi$.

$$\text{Área 1} = \int_0^{\pi} x \sin x dx = [-x \cos x + \sin x]_0^{\pi} = [-\pi \cos \pi + \sin \pi] - [-0 \cdot \cos 0 + \sin 0] = \pi u^2$$

El área entre $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

Calculamos el área como la integral definida de la función entre $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

$$\text{Área 2} = \left| \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx \right| = \left| [-x \cos x + \sin x]_{\pi}^{2\pi} \right| =$$

$$= \left| [-2\pi \cos 2\pi + \sin 2\pi] - [-\pi \cos \pi + \sin \pi] \right| = |-3\pi| = 3\pi u^2$$

El área total es la suma del área 1 y el área 2, es decir, $\pi + 3\pi = 4\pi u^2$.