

Dibujo de Gráficas de funciones.

A) $y = -x^4 + 2x^2$

1.- Dominio de Definición (D_f)

Por ser una función polinómica el $D_f = \mathbb{R}$

2.- Regiones de existencia

Para estudiar las regiones estudiaremos el $\text{sig}(f(x))$, y factorizamos $f(x)$:

$$\text{sig}(f(x)) = \text{sig}(-x^4 + 2x^2) = \text{sig}(x^2(2 - x^2)) = \text{sig}(2 - x^2) = \text{sig}((\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x))$$

(no tiene signo en $x = \pm\sqrt{2}$)

	$(\sqrt{2} + x)$	$(\sqrt{2} - x)$	$f(x)$
$(-\infty, -\sqrt{2})$	-	+	-
$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	+	+	+
$(\sqrt{2}, \infty)$	+	-	-

3.- Puntos de corte con ejes de coordenadas

Eje OX: $y = 0 \Rightarrow -x^4 + 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(2 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$

Eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = -0 + 0 = 0 \Rightarrow y = 0$

4.- Simetrías

Todos los exponentes con los que aparece la variable son pares, luego sabemos que la función será PAR.

$$f(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 = -x^4 + 2x^2 = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es PAR (simétrica respecto OY)}$$

5.- Asíntotas

No tiene por ser función polinómica.

6.- Intervalos de Monotonía

Estudiaremos el $\text{sig}(f'(x))$: calculamos y factorizamos $f'(x) = -4x^3 + 4x = 4x(1 - x^2) = 4x(1 + x)(1 - x)$

$$\text{sig}(f'(x)) = \text{sig}(4x(1+x)(1-x)) = \text{sig}(x(1+x)(1-x)) \quad (\text{no tiene signo en } x=-1, x=0, x=1)$$

	x	$(1+x)$	$(1-x)$	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -1)$	-	-	+	-	Crece
$(-1, 0)$	-	+	+	+	Decrece
$(0, 1)$	+	+	+	+	Crece
$(1, \infty)$	+	+	-	-	Decrece

$f(x)$ es **Crecente** $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y $f(x)$ es **Decrecente** $\forall x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$

7.- Extremos relativos

Como ya tenemos los intervalos de monotonía, aplicando la definición de extremo relativo ("donde hay cambio de monotonía"), podemos afirmar que:

En $x = -1$ y $x = 1$ hay un **Máximo** y en $x = 0$ hay un **Mínimo**.

Tenemos que calcular la segunda coordenada de estos puntos, para ello sustituimos en $f(x)$:

$$f(-1) = -(-1)^4 + 2(-1)^2 = -1 + 2 = 1 \Rightarrow (-1,1) \text{ M}{\acute{a}}ximo$$

$$f(1) = 1 \text{ (es par)} \Rightarrow (1,1) \text{ M}{\acute{a}}ximo$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow (0,0) \text{ M}{\acute{i}}nimo$$

8.- Curvatura

Estudiaremos el $\text{sig}(f'(x))$; calculamos y factorizamos $f'(x)$:

$$f'(x) = -12x^2 + 4 = 12 \left(\frac{1}{3} - x^2 \right) = 12 \left(\sqrt{\frac{1}{3}} + x \right) \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - x \right)$$

$$\text{sig}(f'(x)) = \text{sig} \left(12 \left(\sqrt{\frac{1}{3}} + x \right) \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - x \right) \right) = \text{sig} \left(\left(\sqrt{\frac{1}{3}} + x \right) \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - x \right) \right) \text{ (Observ: } \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577 \approx 0,6 \text{)}$$

	$(0,6 + x)$	$(0,6 - x)$	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -0'6)$	-	+	-	C{\'o}ncava
$(-0'6, 0'6)$	+	+	+	Convexa
$(0'6, \infty)$	+	-	-	C{\'o}ncava

Luego $f(x)$ es **C{\'o}ncava** $\forall x \in (-\infty, -0'6) \cup (0'6, \infty)$ y $f(x)$ es **Convexa** $\forall x \in (-0'6, 0'6)$

9.- Puntos de Inflexi{\'o}n

Como por definici{\'o}n son puntos de inflexi{\'o}n aquellos en donde la curva cambia de curvatura, podemos afirmar (por lo visto en el apartado 8) que:

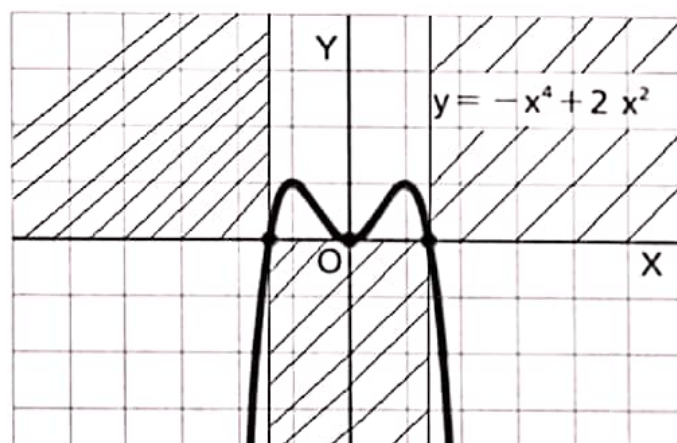
En $x = -0,6$ y $x = 0,6$ hay **Puntos de Inflexi{\'o}n**, necesitamos calcular la segunda coordenada, para lo cual, sustituimos en la funci{\'o}n los dos valores obtenidos (*al ser par la funci{\'o}n el resultado ser{\'a} el mismo en los dos*) y asi:

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^4 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \approx 0,222 \approx 0,2$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{9} \approx 0,2$$

Luego los **Puntos de Inflexi{\'o}n** son $(-0'6, 0'2)$ y $(0'6, 0'2)$

10.- Dibujo



$$\text{B)} \quad y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

1.- Dominio de Definición (D_f)

Por ser una función racional $D_f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / 1+x^2 = 0\}$, pero $1+x^2 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

2.- Regiones de existencia

Para estudiar las regiones estudiaremos el $\text{sig}(f(x))$, y factorizamos $f(x)$:

$\text{sig}(f(x)) = \text{sig}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \text{sig}(x^2(1+x^2)) = + \quad \forall x \in \mathbb{R}$, luego la gráfica de la función se encuentra por encima del eje de abscisas.

3.- Puntos de corte con ejes de coordenadas

Eje OX: $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 / 1 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

4.- Simetrías

Todos los exponentes con los que aparece la variable son pares, luego sabemos que la función será PAR.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{x^2}{1+x^2} = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es PAR (simétrica respecto OY)}$$

5.- Asíntotas

A. Vertical: No tiene pues su denominador es siempre distinto de cero (visto en D_f)

A. Horizontal: Si tiene pues el grado del numerador y denominador son iguales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ es la Asíntota Horizontal}$$

No hay puntos de corte con A.H., pues resolviendo el sistema: $1 = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow 1+x^2 = x^2 \Rightarrow 1 \neq 0$

A. Oblicua: No tiene por tener A. Horizontal, siendo función racional.

6.- Intervalos de Monotonía

Estudiaremos el $\text{sig}(f'(x))$; calculamos y factorizamos $f'(x) = \frac{2x(1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$\text{sig}(f'(x)) = \text{sig}\left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right) = \text{sig}(x) \quad (\text{no tiene signo en } x = 0)$

	x	f'(x)	f(x)
$(-\infty, 0)$	-	-	Decrece
$(0, \infty)$	+	+	Crece

$f(x)$ es **Decreciente** $\forall x \in (-\infty, 0)$ y $f(x)$ es **Creciente** $\forall x \in (0, \infty)$

7.- Extremos relativos

Como ya tenemos los intervalos de monotonía, aplicando la definición de extremo relativo ("donde hay cambio de monotonía"), podemos afirmar que:

En $x = 0$ hay un **Mínimo**.

Tenemos que calcular la segunda coordenada de estos puntos, para ello sustituimos en $f(x)$:

$$f(0) = 0 \Rightarrow (0,0) \text{ Mínimo}$$

8.- Curvatura

Estudiaremos el $\text{sig}(f''(x))$; calculamos y factorizamos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (1+x^2)^2 - 2x \cdot 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot 2 \cdot 2x}{(1+x^2)^3} = \frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6 \cdot \left(\frac{1}{3} - x^2\right)}{(1+x^2)^3} = \frac{6 \cdot \left(\left(\sqrt{\frac{1}{3}} + x\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - x\right)\right)}{(1+x^2)^3}$$

$$\text{sig}(f''(x)) = \text{sig}\left(\frac{6 \cdot \left(\left(\sqrt{\frac{1}{3}} + x\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{3}} - x\right)\right)}{(1+x^2)^3}\right) = \text{sig}\left(\left(\sqrt{\frac{1}{3}} + x\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - x\right)\right)$$

(Observ : $(1+x^2)^3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ y además $\sqrt{\frac{1}{3}} = 0,577 \approx 0,6$)

	$(0,6+x)$	$(0,6-x)$	$f''(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -0'6)$	-	+	-	Cóncava
$(-0'6, 0'6)$	+	+	+	Convexa
$(0'6, \infty)$	+	-	-	Cóncava

Luego $f(x)$ es **Cóncava** $\forall x \in (-\infty, -0'6) \cup (0'6, \infty)$ y $f(x)$ es **Convexa** $\forall x \in (-0'6, 0'6)$

9.- Puntos de Inflexión

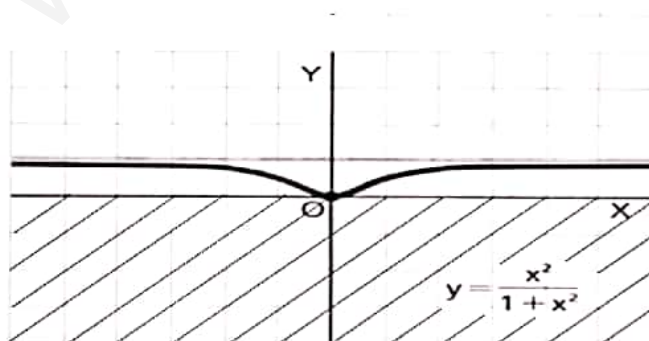
Como por definición son puntos de inflexión aquellos en donde la curva cambia de curvatura, podemos afirmar (por lo visto en el apartado 8) que:

En $x = -0,6$ y $x = 0,6$ hay **Puntos de Inflexión**, necesitamos calcular la segunda coordenada, para lo cual, sustituimos en la función los dos valores obtenidos (al ser par la función el resultado será el mismo en los dos) y así:

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2}{1 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad ; \quad f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Luego los **Puntos de Inflexión** son $(-0'6, 0'25)$ y $(0'6, 0'25)$

10.- Dibujo



C) $y = \ln(x+2)$

1.- Dominio de Definición (D_f)

Por ser una función logarítmica $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 > 0\}$, es decir $x > -2 \Rightarrow D_f = (-2, \infty)$

2.- Regiones de existencia

Para estudiar las regiones estudiaremos el $\text{sig}(f(x))$:

$\text{sig}(f(x)) = \text{sig}(\ln(x+2))$, y como $\ln(x+2) = 0$ si $x+2 = 1 \Rightarrow x = -1$

	$\ln(x+2)$	$f(x)$
$(-2, -1)$	-	-
$(-1, \infty)$	+	+

3.- Puntos de corte con ejes de coordenadas

Eje OX: $y = 0 \Rightarrow \ln(x+2) = 0 \Rightarrow$ si $x+2 = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$

Eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = \ln(0+2) \Rightarrow y = \ln 2 = 0.693 \approx 0.7 \Rightarrow (0, \ln 2)$

4.- Simetrías

$$f(-x) = \ln((-x)+2) = \ln(2-x) \neq f(x)$$

$$-f(x) = -\ln(x+2) = \ln(x+2)^{-1} = \ln \frac{1}{x+2} \neq f(-x) \Rightarrow f(x) \text{ no tiene simetrías.}$$

5.- Asíntotas

A. Vertical: Si tiene pues $\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(x+2) = \ln(-2^++2) = \ln 0^+ = -\infty \Rightarrow x = -2$

A. Horizontal: No tiene pues $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+2) = \infty \notin \mathbb{R}$

A. Oblicua: No tiene pues las funciones Logarítmicas no tienen.

6.- Intervalos de Monotonía

Estudiaremos el $\text{sig}(f'(x))$; calculamos y factorizamos $f'(x) = \frac{1}{x+2}$

$$\text{sig}(f'(x)) = \text{sig}\left(\frac{1}{x+2}\right) = \text{sig}(x+2) \quad (\text{no tiene signo en } x = -2)$$

	$x+2$	$f'(x)$	$f(x)$
$(-2, \infty)$	+	+	Crece

$f(x)$ es **Creciente** $\forall x \in (-2, \infty)$, es decir en todo su D_f .

7.- Extremos relativos

Como ya tenemos los intervalos de monotonía, aplicando la definición de extremo relativo ("donde hay cambio de monotonía"), podemos afirmar que **no tiene extremos relativos** al no variar la monotonía.

8.- Curvatura

Estudiaremos el $\text{sig}(f''(x))$; calculamos y factorizamos $f''(x)$:

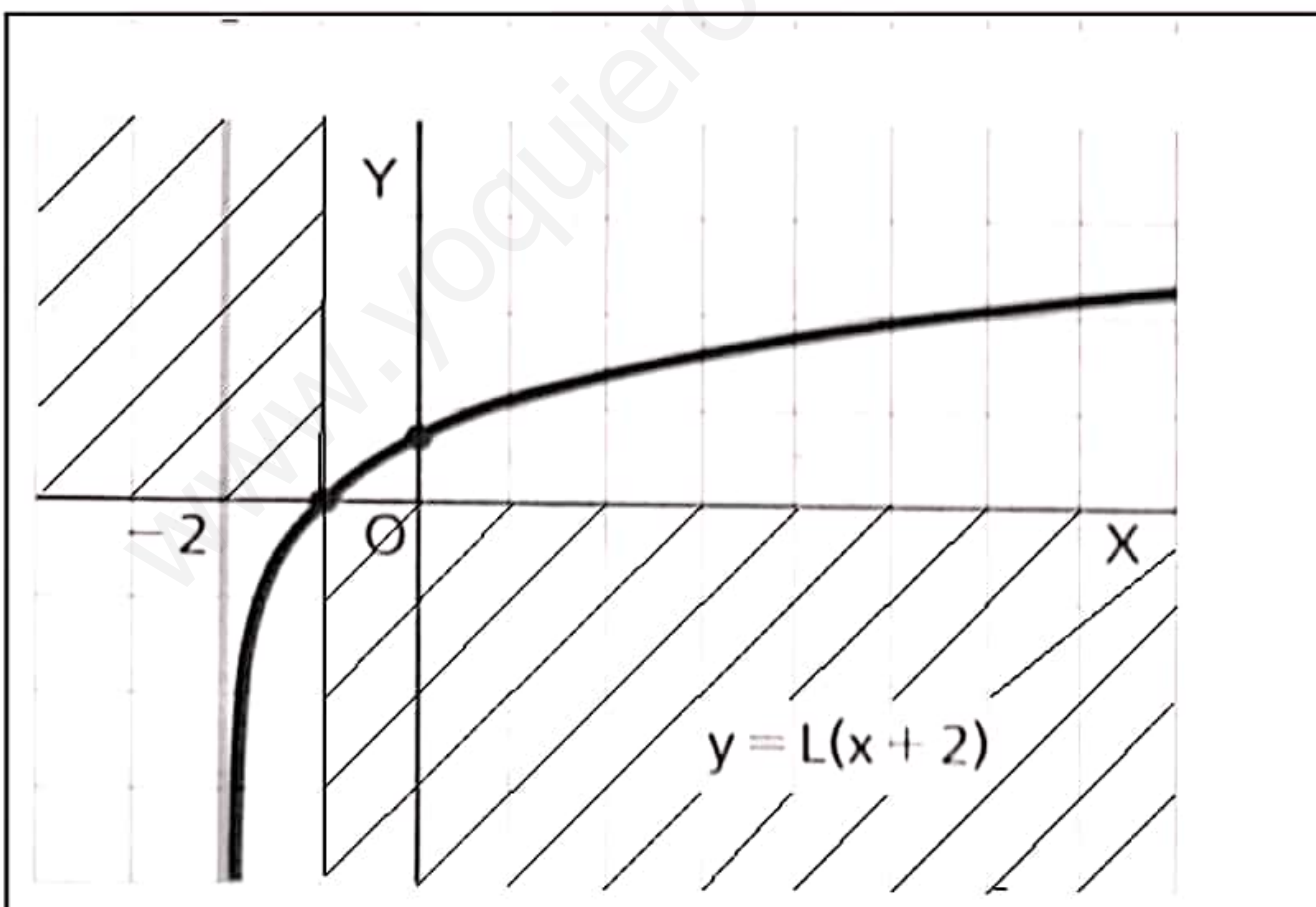
$$f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\text{sig}(f''(x)) = \text{sig}\left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right) = \text{sig}(-1) < 0 \quad \forall x \in D_f \Rightarrow f(x) \text{ es C\u00f3ncava } \forall x \in D_f = (-2, \infty)$$

9.- Puntos de Inflexi\u00f3n

Como por definici\u00f3n son puntos de inflexi\u00f3n aquellos en donde la curva cambia de curvatura, podemos afirmar (por lo visto en el apartado 8) que: **No existen Puntos de Inflexi\u00f3n** al no haber cambio de Curvatura.

10.- Dibujo



D) $y = x^2 \cdot e^x$

- Dominio de Definición (D_f)

Por ser un producto de funciones que ambas tienen de $D_f = \mathbb{R}$, el Dominio común viene dado por la intersección de ambos, en este caso $D_f = \mathbb{R}$

2.- Regiones de existencia

Para estudiar las regiones estudiaremos el **sig ($f(x)$)**, y factorizamos $f(x)$:

$\text{sig}(f(x)) = \text{sig}(x^2 \cdot e^x) = \text{sig}(x^2) = + \quad \forall x \in \mathbb{R}$, luego la gráfica de la función se encuentra por encima del eje de abscisas.

3.- Puntos de corte con ejes de coordenadas

Eje OX: $y = 0 \Rightarrow x^2 \cdot e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ e^x = 0 \Rightarrow \text{Im posible}, e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow (0, 0)$

Eje OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow (0, 0)$

4.- Simetrías

$f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{(-x)} = x^2 \cdot \frac{1}{e^x} = \frac{x^2}{e^x} \neq f(x) \Rightarrow f(x) \text{ no tiene simetrías.}$

$-f(x) = -x^2 \cdot e^x \neq f(-x)$

5.- Asíntotas

A. Vertical: No tiene, pues no existe ningún número real "a" tal que $\lim_{x \rightarrow a, a^+, a^-} f(x) = \pm \infty$

A. Horizontal: Si tiene pues:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^x = \frac{\infty^2}{e^\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 0 \Rightarrow$ pues crece más deprisa la función exponencial del denominador que la

potencial del numerador $\Rightarrow y = 0$ es la Asíntota Horizontal

Si hay puntos de corte con A.H., pues resolviendo el sistema: $x^2 \cdot e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ e^x = 0 \Rightarrow \text{Im posible}, e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$
el punto es $(0, 0)$

A. Oblicua: No tiene, pues: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot e^x}{x} = x \cdot e^x = \infty \notin \mathbb{R}$

6.- Intervalos de Monotonía

Estudiaremos el **sig ($f'(x)$)**; calculamos y factorizamos $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x \cdot e^x \cdot (2 + x)$

$\text{sig}(f'(x)) = \text{sig}(x \cdot e^x \cdot (2 + x)) = \text{sig}(x \cdot (2 + x))$ (no tiene signo en $x = 0$ y $x = -2$)

	x	(2+x)	f'(x)	f(x)
$(-\infty, -2)$	-	-	+	Crece
$(-2, 0)$	-	+	-	Decrece
$(0, \infty)$	+	+	+	Crece

$f(x)$ es Decreciente $\forall x \in (-2, 0)$ y $f(x)$ es Creciente $\forall x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)$

7.- Extremos relativos

Como ya tenemos los intervalos de monotonía, aplicando la definición de extremo relativo ("donde hay cambio de monotonía"), podemos afirmar que:

En $x = -2$ hay un **Máximo**

Tenemos que calcular la segunda coordenada de estos puntos, para ello sustituimos en $f(x)$: $f(-2) = (-2)^2 \cdot e^{(-2)}$

$$= \frac{4}{e^2} = 0.541 \approx 0.5 \Rightarrow (-2, 0.5) \text{ Máximo}$$

En $x = 0$ hay un **Mínimo**

Tenemos que calcular la segunda coordenada de estos puntos, para ello sustituimos en $f(x)$: $f(0) = 0$ (visto anteriormente)

$\Rightarrow (0, 0)$ **Mínimo**

8.- Curvatura

Estudiaremos el $\text{sig}(f''(x))$; calculamos y factorizamos $f''(x)$:

$$f''(x) = 1 \cdot e^x \cdot (2+x) + x \cdot e^x \cdot (2+x) + x \cdot e^x \cdot 1 = e^x \cdot (2+x+2x+x^2+x) = e^x \cdot (x^2+4x+2)$$

$$\text{sig}(f''(x)) = \text{sig}(e^x \cdot (x^2+4x+2)) = \text{sig}(x^2+4x+2) = \text{sig}((x+3.4) \cdot (x+0.6))$$

$$(\text{Observ: } e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y \quad x^2+4x+2=0 \quad \text{si} \quad x = -2 \pm \sqrt{2} \approx \begin{cases} -3.4 \\ -0.6 \end{cases})$$

	$(x+3.4)$	$(x+0.6)$	$f''(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -3.4)$	-	-	+	Convexa
$(-3.4, -0.6)$	+	-	-	Cóncava
$(0.6, \infty)$	+	+	+	Convexa

Luego $f(x)$ es **Convexa** $\forall x \in (-\infty, -3.4) \cup (0.6, \infty)$ y $f(x)$ es **Cóncava** $\forall x \in (-3.4, 0.6)$

9.- Puntos de Inflexión

Como por definición son puntos de inflexión aquellos en donde la curva cambia de curvatura, podemos afirmar (por lo visto en el apartado 8) que:

En $x = -3.4$ y $x = -0.6$ hay **Puntos de Inflexión**, necesitamos calcular la segunda coordenada, para lo cual, sustituimos en la función los dos valores obtenidos:

$$f(-3.4) = (-3.4)^2 \cdot e^{(-3.4)} = 0.386 \approx 0.4 \quad ; \quad f(-0.6) = (-0.6)^2 \cdot e^{(-0.6)} = 0.197 \approx 0.2$$

Luego los **Puntos de Inflexión** son $(-3.4, 0.4)$ y $(-0.6, 0.2)$

10.- Dibujo

