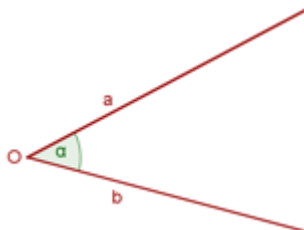


TEMA 4: TRIGONOMETRÍA. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

4.1 Medida de ángulos. Equivalencias.

Un **ángulo** es la región del plano comprendida entre dos semirrectas con origen común. A las semirrectas se las llama **lados** y al origen común **vértice**.



El ángulo es **positivo** si se desplaza en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y **negativo** en caso contrario.

Para medir ángulos se utilizan las siguientes unidades:

1. Grado sexagesimal ($^{\circ}$)

Si se divide la circunferencia en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un grado (1°) sexagesimal. Un grado tiene 60 minutos ($'$) y un minuto tiene 60 segundos ($''$).

2. Radián (rad)

Es la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio.

Equivalencia entre grados sexagesimales y radianes: $2\pi \text{ rad} = 360^{\circ}$

4.2 Razones trigonométricas

Se llama **circunferencia goniométrica** a aquella que tiene su **centro en el origen de coordenadas** y su **radio es la unidad**. En la circunferencia goniométrica los **ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes** que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.

Si miramos en el sentido de la flecha, de la figura 1, obtenemos las **razones trigonométricas**:

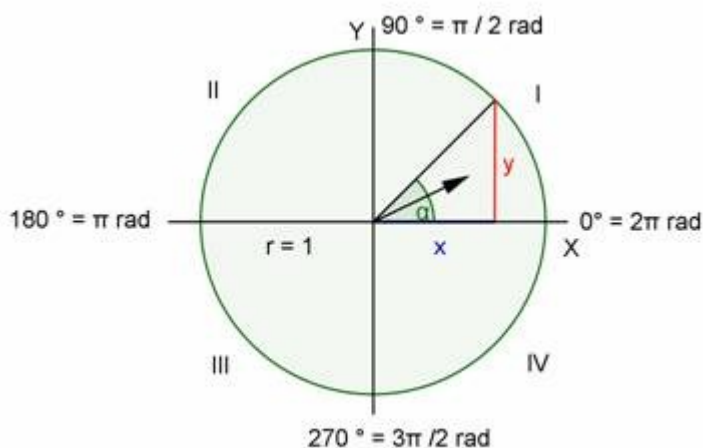


Figura 1

Seno del ángulo α : es la **razón entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa**. Se denota por **sen α** .

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}$$

Coseno del ángulo α : es la **razón entre el cateto contiguo al ángulo y la hipotenusa**. Se denota por **cos α** .

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

Tangente del ángulo α : es la **razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo**. Se denota por **tg α** .

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Cosecante del ángulo α : es la **razón inversa del seno de α** . Se denota por **cosec α** .

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{r}{y}$$

Secante del ángulo α : es la **razón inversa del coseno de α** . Se denota por **sec α** .

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{r}{x}$$

Cotangente del ángulo α : es la **razón inversa de la tangente de α** . Se denota por **cotg α** .

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{x}{y} = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$$

4.3 Identidades trigonométricas fundamentales

Relación Fundamental: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Si observamos la figura 1, el cateto "x" es el coseno del ángulo, y el cateto "y" es el seno. Aplicando el Teorema de Pitágoras, se cumpliría que $x^2 + y^2 = 1^2$.

Esto es lo mismo que decir $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Conociendo el valor del seno o del coseno de un ángulo podemos hallar el resto de las razones trigonométricas de dicho ángulo.

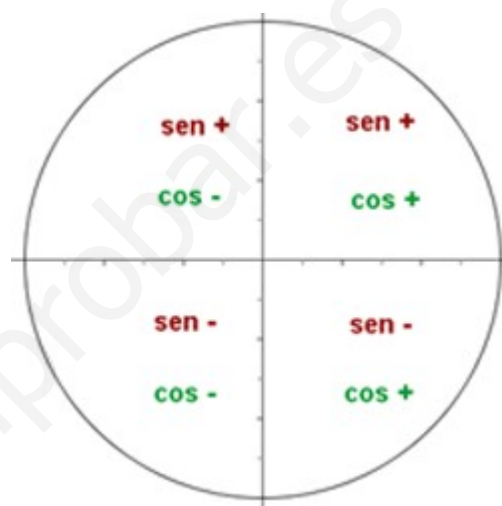
A partir de la Relación Fundamental y de la definición de la tangente, podemos llegar a las siguientes relaciones:

$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha$$

Signo de las razones trigonométricas:

Razón Trigonométrica	CUADRANTE			
	I	II	III	IV
Sen , Cosec	+	+	-	-
Cos , Sec	+	-	-	+
Tg, Cotg	+	-	+	-



Razones trigonométricas de ángulos notables:

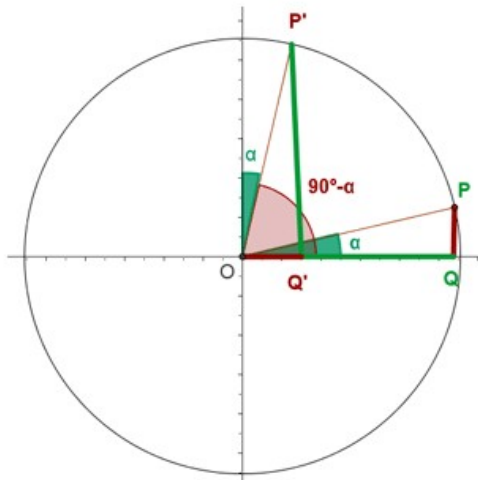
Grados	0° = 360°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
Radianes	0 = 2π	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
Tangente	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	∞	0	-∞

Para hallar el valor de una razón trigonométrica con la calculadora, ponemos el ángulo en grados y damos a la tecla "sin", "cos" o "tan" según corresponda. En otras damos primero a la tecla "sin", "cos" o "tan" y después ponemos el ángulo.

Para hallar el valor de un ángulo conociendo el valor de la razón trigonométrica, damos antes de las teclas "sin", "cos" o "tan", la tecla "shift"

4.4 Relaciones entre las razones de ciertos ángulos:

Ángulos Complementarios:



$$\begin{aligned}\sin(\pi/2 - \alpha) &= \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(\pi/2 - \alpha) &= \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \tan(\pi/2 - \alpha) &= \tan(90^\circ - \alpha) = 1 / \tan \alpha\end{aligned}$$

**Sabiendo las razones de un ángulo de 25°.
Halla las razones trigonométricas de 65°**

$$\sin 65^\circ = \sin(90^\circ - 25^\circ) = \cos 25^\circ = 0,906$$

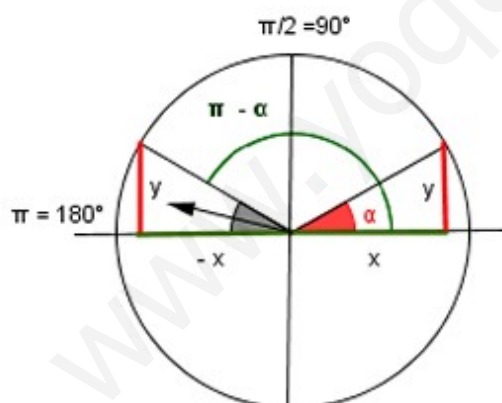
$$\cos 65^\circ = \cos(90^\circ - 25^\circ) = \sin 25^\circ = 0,423$$

$$\tan 65^\circ = 1 / \tan 25^\circ = 2,145$$

Ángulos Suplementarios:

En radianes: α y $(\pi - \alpha)$

En grados: α y $(180^\circ - \alpha)$



$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

Halla las razones trigonométricas de 135°

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

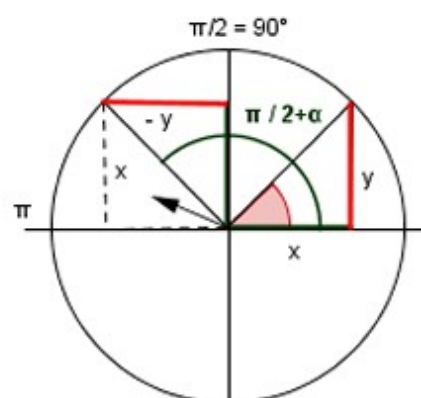
$$\cos 135^\circ = -\cos(180^\circ - 135^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

Ángulos que difieren en 90°

En radianes: α y $(\pi/2 + \alpha)$

En grados: α y $(90^\circ + \alpha)$



$$\sin(\pi/2 + \alpha) = \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\pi/2 + \alpha) = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\pi/2 + \alpha) = \tan(90^\circ + \alpha) = -1 / \tan \alpha$$

Halla las razones trigonométricas de 115°

$$\sin 115^\circ = \sin(90^\circ + 25^\circ) = \cos 25^\circ = 0,906$$

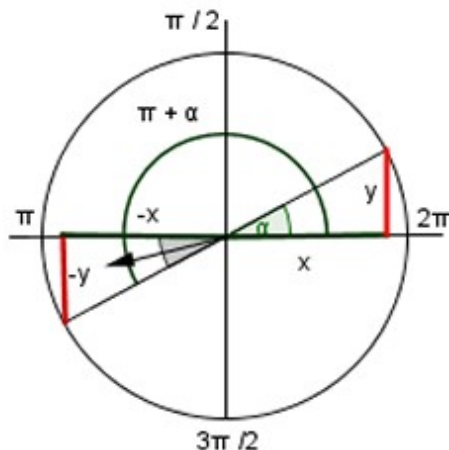
$$\cos 115^\circ = -\sin 25^\circ = -0,423$$

$$\tan 115^\circ = -1 / \tan 25^\circ = -2,145$$

Ángulos que difieren en 180°

En radianes: $(\pi + \alpha)$ y α

En grados: $(180^\circ + \alpha)$ y α



$$\text{sen}(\pi + \alpha) = \text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{cos}(\pi + \alpha) = \text{cos}(180^\circ + \alpha) = -\text{cos } \alpha$$

$$\text{tan}(\pi + \alpha) = \text{tan}(180^\circ + \alpha) = \text{tan } \alpha$$

Halla las razones trigonométricas de 210°

$$\text{sen } 210^\circ = \text{sen}(180^\circ + 30^\circ) = -\text{sen } 30^\circ = -0,5$$

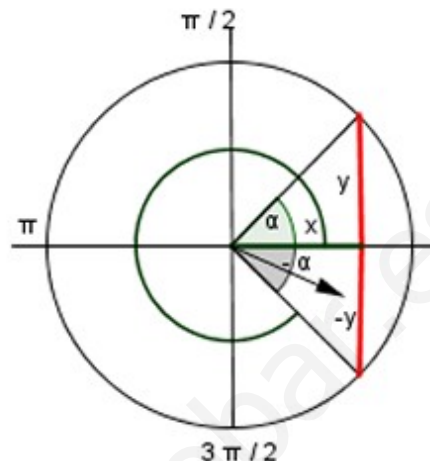
$$\text{cos } 210^\circ = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tan } 210^\circ = \text{tan } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ángulos Opuestos

En radianes: $-\alpha$ y α

En grados: $(360^\circ - \alpha)$ y α



$$\text{sen}(-\alpha) = \text{sen}(360^\circ - \alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{cos}(-\alpha) = \text{cos}(360^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha$$

$$\text{tan}(-\alpha) = -\text{tan}(360^\circ - \alpha) = -\text{tan } \alpha$$

Halla las razones trigonométricas de 315°

$$\text{sen } 315^\circ = \text{sen}(360^\circ - 45^\circ) = -\text{sen } 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 315^\circ = \text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tan } 315^\circ = -\text{tan } 45^\circ = -1$$

4.5 EJERCICIOS:

1. Pasa a grados sexagesimales: $\frac{\pi}{5} \text{ rad}$; $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$; $0,25 \text{ rad}$; 4 rad
2. Pasa a radianes: 270° ; 30° ; 45° ; 35° ; 1316°
3. Sabiendo que $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, y que $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α .
4. Sabiendo que $\text{tg } \alpha = 2$, y que $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α .
5. Sabiendo que $\sec \alpha = 2$, $0 < \alpha < \pi/2$, calcular las restantes razones trigonométricas.
6. Calcula las razones trigonométricas utilizando las relaciones entre ángulos: 225° , 330° , 2655° , -840°

TEMA 5: APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

5.1 Resolución de triángulos rectángulos

Relación entre los lados. Teorema de Pitágoras

Ver figura 1

Lados $\begin{cases} a: \text{hipotenusa} \\ b \text{ y } c: \text{catetos} \end{cases}$ $a^2 = b^2 + c^2$

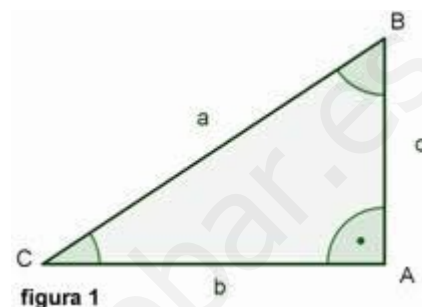
Relación entre sus ángulos

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \quad \hat{A} = 90^\circ$$

Relaciones entre lados y ángulos.

Razones trigonométricas

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} \quad \cos \hat{C} = \frac{b}{a} \quad \tan \hat{C} = \frac{c}{b}$$



Resolver triángulos rectángulos

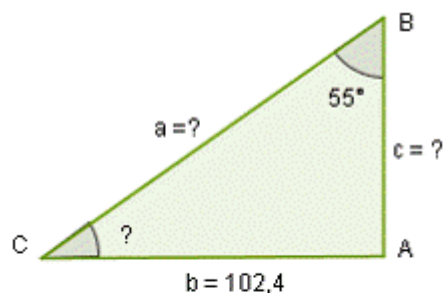
Resolver un triángulo es decir lo que valen sus 3 ángulos y sus 3 lados.

1. Resolver el triángulo rectángulo ABC sabiendo que el lado $b = 102,4$ m y el ángulo $B = 55^\circ$. Ver figura 2

$$C = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \rightarrow c = \frac{b}{\operatorname{tg} B} \rightarrow c = \frac{102,4}{\operatorname{tg} 55^\circ} = 71,7 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} \rightarrow a = \frac{102,4}{\operatorname{sen} 55^\circ} = 125 \text{ m}$$

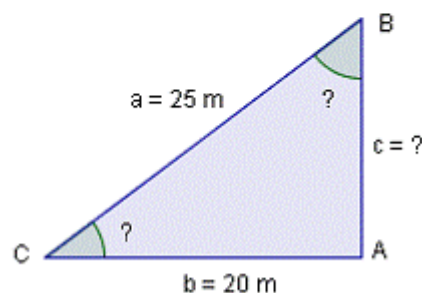


2. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $a = 25$ m y el cateto $b = 20$ m. Resolver el triángulo. Ver figura 3

$$\cos C = \frac{b}{a} \rightarrow \cos C = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \rightarrow C = 36,86^\circ$$

$$B = 90^\circ - 36,86^\circ = 53,15^\circ$$

$$\operatorname{Sen} C = \frac{c}{a} \rightarrow c = \operatorname{sen} 36,86^\circ \cdot 25 \rightarrow c = 15 \text{ m}$$



5.2 Cálculo de distancias desconocidas

La trigonometría se utiliza para calcular distancias desconocidas, midiendo ángulos (con un aparato que se llama teodolito) y distancias conocidas.

Ejemplos de cálculo de alturas:

1. Medir la altura de un edificio desde el suelo

Nos colocamos en un punto (B) y medimos el ángulo de elevación (uno de sus lados es la línea horizontal desde donde miremos, y el otro el punto más alto del edificio) en este caso vale 45° .

Nos acercamos o nos alejamos del primer punto una distancia conocida. Nos alejamos 30 m.

Desde este segundo punto (A) volvemos a medir el ángulo de elevación, 30° .

Hacemos un dibujo de las medidas tomadas y resolvemos. Calcular "h" y "x" de la figura 1.

Tenemos dos triángulos rectángulos que tienen en común un cateto que es "h". Planteamos un sistema de ecuaciones utilizando la tangente de los dos triángulos

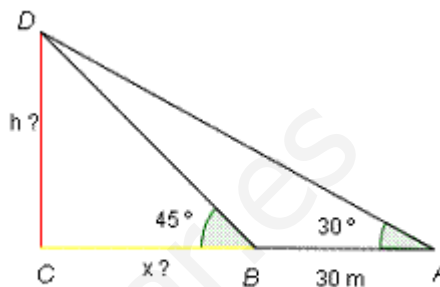


figura 1

$$\begin{cases} \tan 30 = \frac{h}{x+30} \\ \tan 45 = \frac{h}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \tan 30 \cdot (x+30) \\ h = \tan 45 \cdot x \end{cases} \Rightarrow x = 0,5773x + 17,32 \Rightarrow \begin{cases} x = 41 \text{ m} \\ h = 41 \text{ m} \end{cases}$$

2. Juan y Pedro ven desde las puertas de sus casas una torre, bajo un ángulo de 45° y 60° . La distancia entre sus casas es de 126 m y la torre está situada entre sus casas. Halla la altura de la torre.

Al trazar la altura de la torre se originan dos triángulos rectángulos. Si llamamos x a la distancia de uno de los observadores al pie de la torre la distancia del otro debe ser "126 - x". Utilizamos las tangentes en ambos triángulos rectángulos, ya que tienen en común un cateto que es la altura de la torre. Planteamos el sistema de ecuaciones y resolvemos.

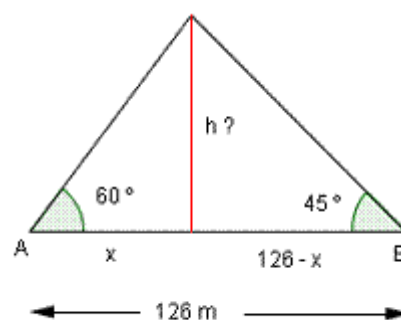
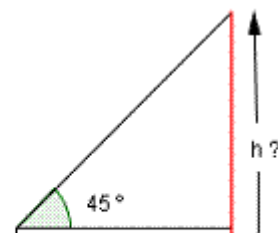


figura 2

$$\begin{cases} \tan 45 = \frac{h}{126-x} \\ \tan 60 = \frac{h}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = (126-x)\tan 45 \\ h = x \cdot \tan 60 \end{cases} \Rightarrow (126-x) \cdot 1 = x \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}x + x = 126$$
$$x = \frac{126}{1+\sqrt{3}} \approx 46,12 \text{ m} \Rightarrow h = \frac{126}{1+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \approx 79,88 \text{ m}$$

3. El ángulo de elevación de una torre es de 45° , a una distancia de 72 m de la torre. Si el observador se encuentra a 1,10 m sobre el suelo (altura de sus ojos), calcula la altura de la torre.

Aplicamos la tangente de 45° al triángulo rectángulo.



$$\tan 45^\circ = \frac{h - 1,1}{72} \Rightarrow h = 72 \cdot \tan 45^\circ + 1,1 \Rightarrow h = 72 + 1,1 \Rightarrow h = 73,1 \text{ m}$$

5.3 Resolución de cualquier tipo de triángulos

Teorema de los senos

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos

$$\frac{a}{\sen A} = \frac{b}{\sen B} = \frac{c}{\sen C}$$

Aplicaciones:

- a) Resolver un triángulo cuando conocemos dos ángulos y un lado.
- b) Resolver un triángulo cuando conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Ejemplo: Resolver un triángulo con los siguientes datos: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $B = 30^\circ$

Dibujamos el triángulo y colocamos los datos conocidos.

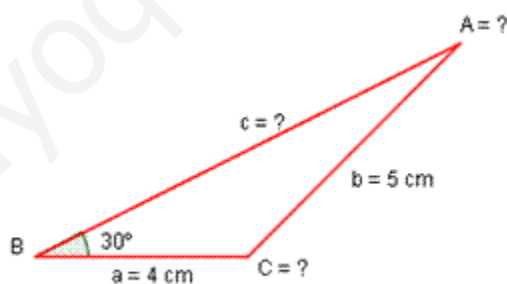


Figura 1

Calculamos el ángulo A, conocemos dos lados y el ángulo opuesto a "b".

$$\frac{a}{\sen A} = \frac{b}{\sen B} \Rightarrow \frac{4}{\sen A} = \frac{5}{\sen 30^\circ} \Rightarrow \sen A = \frac{4 \cdot 0,5}{5} = 0,4 \Rightarrow A = 23,58^\circ$$

Calculamos el ángulo C:

$$C = 180^\circ - (23,58^\circ + 30^\circ) = 126,42^\circ$$

Calculamos el lado "c":

$$\frac{c}{\sen 126,42^\circ} = \frac{5}{\sen 30^\circ} \Rightarrow c = \frac{5 \cdot \sen 126,42^\circ}{\sen 30^\circ} \Rightarrow c = 8,1 \text{ cm}$$

Teorema del coseno

En un triángulo de lados a , b y c ; y de ángulos A , B y C , se verifica:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Aplicaciones:

- a) Cuando conocemos los 3 lados.
- b) Cuando conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
- c) Cuando conocemos dos lados y el ángulo que forman

Ejemplo: Resolver un triángulo con los datos siguientes: $a = 1200\text{m}$, $c = 700\text{m}$ y $B = 108^\circ$

Dibujamos y vemos que nos dan dos lados y el ángulo que forman, calculamos el otro lado.

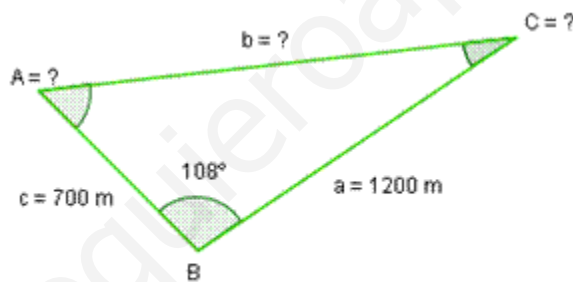


Figura 2

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow b = \sqrt{1200^2 + 700^2 - 2 \cdot 1200 \cdot 700 \cdot \cos 108} \Rightarrow b = 1564,97 \text{ m}$$

Con "a" y "b" conocidos calculamos el ángulo C:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = \frac{700^2 - 1200^2 - 1564,97^2}{-2 \cdot 1200 \cdot 1564,97} \Rightarrow$$
$$\cos C = 0,90 \Rightarrow C = 25^\circ 18'$$

También podíamos haber calculado el ángulo C utilizando el teorema del seno.

Por último calculamos el ángulo A:

$$A = 180^\circ - (108^\circ + 25,18^\circ) = 46,82^\circ$$

5.4 EJERCICIOS

1. De un triángulo rectángulo ABC , se conocen $a = 5$ m y $B = 41.7^\circ$. Resolver el triángulo
2. De un triángulo rectángulo ABC , se conocen $b = 3$ m y $B = 54.6^\circ$. Resolver el triángulo.
3. De un triángulo rectángulo ABC , se conocen $a = 6$ m y $b = 4$ m. Resolver el triángulo.
4. De un triángulo rectángulo ABC , se conocen $b = 3$ m y $c = 5$ m. Resolver el triángulo.
5. Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.
6. Un dirigible que está volando a 800 m de altura, distingue un pueblo con un ángulo de depresión de 12° . ¿A qué distancia del pueblo se halla?
7. Calcular el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de 70° .
8. Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de 60° .