EJERCICIOS - SOLUCIONES

OSCILADOR ARMÓNICO

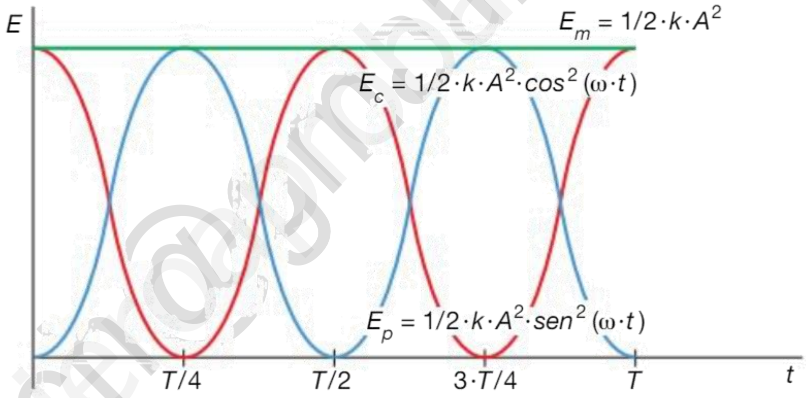
1. Representa gráficamente la variación de la energía mecánica, la cinética y la potencial con el tiempo para un oscilador armónico horizontal.

Si en las expresiones de E_C y E_P sustituimos x por su variación temporal, $x = A \cdot sen(\omega \cdot t)$, resulta:

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot cos^2(\omega \cdot t) \qquad E_P = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot sen^2(\omega \cdot t)$$

Por tanto, la representación gráfica pedida es loa que se muestra a la derecha, donde T es el período de oscilación:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

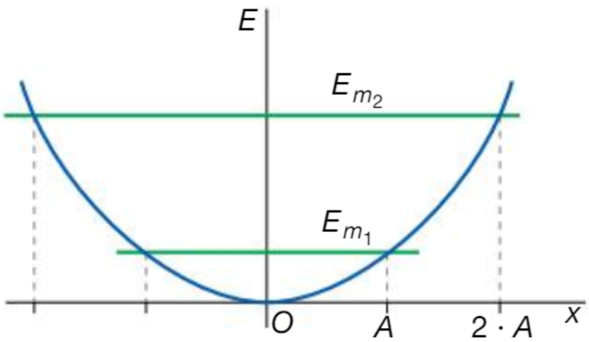


2. Si duplicamos la amplitud de la oscilación de un oscilador armónico, ¿qué le ocurre a la frecuencia y a la energía mecánica?

A la frecuencia no le sucede nada, pues en un oscilador armónico solo depende de la masa y de la constante elástica.

Como la energía mecánica es proporcional al cuadrado de la amplitud, al duplicar la amplitud, se cuadruplicará la energía mecánica.

$$\left.\begin{array}{l} E_{m_1} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \\ E_{m_2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (2 \cdot A)^2 \\ E_{m_2} = 4 \cdot E_{m_1} \end{array}\right\}$$



3. Un péndulo de 2m de longitud y 100g de masa realiza oscilaciones de 1cm de amplitud. Determina su velocidad máxima y la energía mecánica de oscilación.

Como las oscilaciones son muy pequeñas, el péndulo se comporta como un oscilador armónico cuya frecuencia angular es: (visto en Dinámica)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9'8}{2}} = 2'21 \ (rad/s)$$

Por tanto, la velocidad máxima del péndulo resulta:

$$v_{max} = \pm A \cdot \omega = \pm 0'01 \cdot 2'21 = \pm 0'0221 \ (m/s)$$

La energía mecánica es igual a la energía cinética máxima:

$$E_M = E_c(max) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0'1 \cdot (0'0221)^2 = 2{,}44 \cdot 10^{-5} \ (J)$$

(Se supone que la altura de la bola del péndulo es nula en el centro del movimiento).

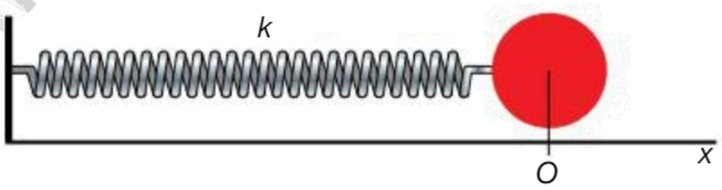
4. Un cuerpo de 100g está unido a un resorte de constante elástica $k = 150N/m$ y situado sobre el eje X. Se separa de su posición de equilibrio 40cm y se deja en libertad para que oscile libremente. Calcula el período de oscilación y la energía mecánica que inicia el movimiento.

El período es:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{k/m}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{0{,}1}{150}} = 0{,}16 \ s$$

La energía mecánica del movimiento se conserva. Por tanto, no importa en qué instante se calcule, lo que varía son sus energías cinética y potencial. El valor de la energía mecánica es:

$$E_M = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 0{,}4^2 = 12 \ J$$



5. Un oscilador armónico de 1,5kg de masa oscila con una frecuencia de 3Hz y una amplitud de 7cm. Calcula la energía mecánica del oscilador.

En primer lugar, calculamos la frecuencia angular del oscilador:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot \pi \cdot 3 = 6\pi \ (rad/s)$$

Si aplicamos la ecuación de la energía mecánica para un oscilador armónico, obtenemos:

$$k = m \cdot \omega^2 = 1{,}5 \cdot (6\pi)^2 = 532{,}96\ kg/s^2$$
$$E_M = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = \frac{1}{2} \cdot 532{,}96 \cdot 0{,}07^2 = 1{,}31\ J$$

6. Una bola cuelga de un muelle vertical. Demuestra que si no hay fuerzas disipativas se comporta como un oscilador armónico.

En reposo, el peso de la bola se equilibra con la fuerza elástica o recuperadora del muelle, de modo que este se estira una longitud extra, l_0, respecto de su longitud normal. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F_{elas} - p = 0 \quad \rightarrow \quad F_{elas} = p \quad \rightarrow \quad k \cdot l_0 = m \cdot g$$

Si ahora aplicamos una fuerza vertical hacia abajo sobre la bola, el muelle se deformará adicionalmente hasta la longitud l. Cuando se libere la bola y esta pueda desplazarse libremente, la fuerza total que actuará sobre la misma resulta:

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_{elas}} + \vec{p} \quad \rightarrow \quad F = k \cdot l - m \cdot g = k \cdot l - k \cdot l_0 = k \cdot (l - l_0) = k \cdot y$$

Donde $y = l - l_0$ es la elongación adicional del muelle, es decir, medida desde la posición de equilibrio vertical del sistema muelle-bola.

Por tanto, la fuerza que actúa sobre la bola es una fuerza elástica o recuperadora que sigue la ley de Hooke y cuya constante coincide con la del muelle. Si no hay fuerzas disipadoras, el movimiento oscilante será un M.A.S. vertical cuya frecuencia angular o pulsación es:

$$k = m \cdot \omega^2 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

7. Responde:

a) La energía cinética, ¿es mínima en el centro de la oscilación de un oscilador armónico?

La energía cinética será mínima cuando su velocidad sea nula. Esto sucede en los extremos de la oscilación, no en el centro, donde es máxima.

b) Para que un sistema sea verdaderamente un oscilador armónico, ¿es preciso que no tenga masa?

Un oscilador armónico es una masa puntual, punto material o partícula que se mueve ejecutando un movimiento armónico simple. Por tanto, es imprescindible que tenga masa, $m \neq 0$. Ahora bien, cuanto mayor sea la masa, tanto mejor será la aproximación a un oscilador armónico de un sistema real

8. Un carrito de 2,4kg se desplaza horizontalmente unido a un muelle de masa despreciable. Inicialmente, su movimiento es un M.A.S. ($A = 5cm$; $v_{max.} = 1{,}5m/s$), Mediante razonamientos energéticos, calcula la constante elástica del muelle y la velocidad del carrito a la mitad de la amplitud.

Como el movimiento es horizontal, no consideramos la energía potencial gravitatoria ($\Delta E_{Pg} = m \cdot g \cdot \Delta h = 0$). Por tanto, la energía mecánica es constante y toda la energía potencial es elástica.

La energía cinética máxima (posición de equilibrio del oscilador armónico) vale:

$$E_C(máx.) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2{,}4 \cdot 1{,}5^2 = 2{,}7\ J$$

En los extremos ($x = \pm A, v = 0$), toda la energía cinética se ha convertido en energía potencial elástica. Con ello, podemos determinar k:

$$E_C(máx.) = E_P(máx.) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 = 2{,}7\ J \ \rightarrow \ k = \frac{2{,}7 \cdot 2}{A^2} = \frac{2{,}7 \cdot 2}{0{,}05^2} = 2160\, \frac{N}{m}$$

Para calcular la velocidad en la posición correspondiente a la semiamplitud, $x = A/2 = 2{,}5cm$, empleamos el Teorema de Conservación de la Energía Mecánica (por tratarse solo de fuerzas conservativas):

$$E_M = E_C + E_P$$

$$E_C = E_M - E_P = E_M - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = 2{,}7 - \frac{1}{2} \cdot 2160 \cdot 0{,}025^2 = 2{,}025\ J$$

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 2{,}025 \ \rightarrow \ v = \sqrt{\frac{2{,}025 \cdot 2}{m}} = \sqrt{\frac{2{,}025 \cdot 2}{2{,}4}} = 1{,}3\ m/s$$

Observa que la reducción de la velocidad no es uniforme, pues ha recorrido la mitad del camino del centro a un extremo y v es casi igual a v_{max}.