NÚMEROS COMPLEJOS

La unidad imaginaria i.

Hay ecuaciones que no se pueden resolver en $\mathbb{R}$.

Por ejemplo: $x^2+1=0 \to x^2=-1 \to x=\pm\sqrt{-1}$

En el siglo XVI "se inventaron" un número para resolver esta ecuación. Lo llamaron la unidad imaginaria, i.

Desde entonces estos números se conocen como imaginarios.

Euler llamó $i=\sqrt{-1}$ a los números imaginarios.

Posteriormente Gauss los llamó **números complejos**, $\mathbb{C}$. Por tanto, podemos definir un nuevo conjunto $\mathbb{C}$ en el que sí tiene solución.

$i=\sqrt{-1}$

$x=\pm\sqrt{-1} \to \boxed{x=\pm i}$

Los números complejos.

Números complejos se denotan con la letra $\mathbb{C}$ y verifican:

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $i=\sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2=-1$
- Los números complejos se pueden expresar de la forma: $z=a+bi$, donde a y b son números reales (forma binómica).
- Posee las operaciones de suma y multiplicación, con las misma reglas que en $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

NOTAS.

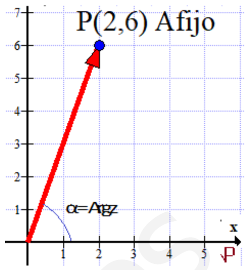
- Se llama **parte real** de $z=a+bi$ al número real a, que se denota **Re(z)**, y **parte imaginaria** de $z=a+bi$, al número real b, que se denota **Im(z).**
- Dos números complejos $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ son iguales si y solo si a = c y b = d
- El opuesto de $z_1=a+bi$ es $z_2=-a-bi$.
- Si b = 0: el número complejo es en realidad un número real.
- Si a = 0: el número se llama complejo o imaginario puro.

Representación gráfica de un número complejo.

Se llama afijo de $z = a + bi$ al punto P(a, b) del plano.

A las coordenadas de P se les llama, respectivamente:

- Parte real: Re(z) = a.
- Parte imaginaria: Im(z) = b.



A esta representación geométrica se la conoce como el **Diagrama de Argand**.

El eje OX se llama **eje real**.

El eje OY se llama **eje imaginario**.

Modulo de z: es el módulo del vector $\vec{u}$ = (a, b) asociado a z: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento de z: es el ángulo formado por el semieje positivo de las x y la semirrecta OP, medido en sentido antihorario. Se representa:

$$Arg(z) = \alpha = arctg\frac{b}{a}$$

$$Arg(z) = \alpha = arctg\frac{b}{a}$$

Se llama **argumento principal** al ángulo de la primera vuelta.

Operaciones en forma binómica

Las operaciones de suma y producto definidas en los números reales se pueden extender a los números complejos.

Suma: (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) i

Producto: (a + bi) · (c + di) = (a·c – b·d) + (a·d + b·c) i

El **conjugado** del número complejo z = a + bi, se define como: $\bar{z} = a - bi$.

División. Para dividir números complejos se multiplica, numerador y denominador por el conjugado del denominador.

EJEMPLO

Realiza:

- $i^0=1$;
- $i^1=i$.
- $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1(-i)}{i(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$
- $i^2 = -1$.
- $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$.
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$.
- Cuando el exponente es mayor de 4, basta dividirlo entre 4 y quedarnos con el resto.

  $i^{43} = i^3 = i^2 \cdot i = -1\, i = -I$

  $$\begin{array}{r|l} 43 & 4 \\ \cline{2-2} 03 & 10 \\ \boxed{3} & \end{array}$$

- $(3 + 5i) + (7 - 2i) = 10 + 3i$
- $(3 + 5i) \cdot (7 - 2i) = 21 - 6i + 35i - 10\, i^2 = 31 + 29i$
- $\frac{3}{2+i} = \frac{3\cdot(2-i)}{(2+i)\cdot(2-i)} = \frac{6-3i}{2^2-i^2} = \frac{6-3i}{4-(-1)} = \frac{6-3i}{5} = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$
- $(1 + i)^4 = \binom{4}{0}\cdot 1^4 + \binom{4}{1}\cdot 1^3 \cdot i + \binom{4}{2}\cdot 1^2 \cdot i^2 + \binom{4}{3}\cdot 1 \cdot i^3 + \binom{4}{4}\cdot i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$

Propiedades de las operaciones con complejos conjugados

1) $\overline{\overline{z}} = z$

2) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

3) $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)\,i$

4) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

5) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}; z_2 \neq 0$

8) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}; z \neq 0$

Demostraciones.

1) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a+bi = z$

2) $z+\overline{z} = (a+bi)+(a-bi) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$

3) $z-\overline{z} = (a+bi)-(a-bi) = 2bi = 2\,\mathrm{Im}(z)\,i$

4) $z\cdot\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = \left(a^2+b^2\right) + i\,(ba-ab) = \left(a^2+b^2\right) = |\,z\,|^2$

5a) $\overline{z_1+z_2} = \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i =$
$= (a-bi)+(c-di) = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

5b) $\overline{z_1-z_2} = \overline{(a+bi)-(c+di)} = \overline{(a-c)+(b-d)i} = (a-c)-(b-d)i =$
$= (a-bi)-(c-di) = \overline{z_1}-\overline{z_2}$

6) $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{(a+bi)\cdot(c+di)} = \overline{(a\cdot c-b\cdot d)+(a\cdot d+b\cdot c)i} = (a\cdot c-b\cdot d)-(a\cdot d+b\cdot c)i$
$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = \overline{(a+bi)}\cdot\overline{(c+di)} = (a-bi)\cdot(c-di) = (a\cdot c-b\cdot d)-(a\cdot d+b\cdot c)i$

Desde ambos miembros de la igualdad llegamos al mismo resultado.

Se cumple.

7) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}\right)} = \frac{\overline{z_1}\cdot\overline{\overline{z_2}}}{z_2\cdot\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}\cdot z_2}{z_2\cdot\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};\ z_2\neq 0$

Complejos en forma polar y trigonométrica.

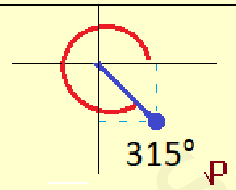
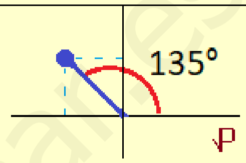
Para obtener la forma polar de un número complejo hay que calcular su módulo y su argumento.

$$z=a+b\,i=r_\alpha,\ \text{donde}:\begin{cases} r=|\,z\,|=\sqrt{a\ \ +b^2} \\ \alpha=\mathrm{Arg}(z)=\mathrm{arctg}\,\dfrac{b}{a}\end{cases}$$

$$|\,z\,| = \sqrt{a^2+b^2}$$

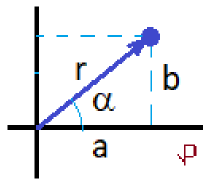
$$\alpha = \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$$

EJEMPLO
Expresa los números complejos z = 1 - i y z = -1 + i en forma polar

Binómica	Polar	
z = 1 - i	$\left.\begin{array}{l} r = \lvert z \rvert = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{-1}{1} = 315^{\circ} \end{array}\right\} \rightarrow z = \sqrt{2}_{315^{\circ}}$	
z = -1 + i	$\left.\begin{array}{l} r = \lvert z \rvert = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{1}{-1} = 135^{\circ} \end{array}\right\} \rightarrow z = \sqrt{2}_{135^{\circ}}$	

¿Qué es la forma trigonométrica? Del esquema de la derecha

podemos concluir: $\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{a}{r} \rightarrow a = r\cos\alpha \\ \text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{r} \rightarrow b = r\,\text{sen}\,\alpha \end{array}\right.$



$a = r\cos\alpha$
$b = r\,\text{sen}\,\alpha$

Así pues, para pasar de forma polar a forma binómica:

$$z = r_{\alpha},\ \text{donde}: \left\{\begin{array}{l} a = r\cos\alpha \\ b = r\,\text{sen}\,\alpha \end{array}\right.$$

La forma trigonométrica de un número complejo z se calcula de la siguiente forma: $z = a + bi = r\cos\alpha + (r\,\text{sen}\,\alpha)i = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$

EJEMPLO
Expresa el número complejo z = 1 + i en forma polar y trigonométrica:

Binómica	Polar	Trigonométrica
z = 1 + i	$\left.\begin{array}{l} r = \lvert z \rvert = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \text{arctg}\dfrac{1}{1} = 45^{\circ} \end{array}\right\} \rightarrow z = \sqrt{2}_{45^{\circ}}$	$z = \sqrt{2}\cdot(\cos 45^{\circ} + i\,\text{sen}\,45^{\circ})$

Operaciones en forma polar

Usaremos la forma polar para multiplicar, dividir y hacer raíces.

- Producto: $r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$
- Potencias: $(r_\alpha)^n = (r)^n{}_{n\alpha} = r^n(\cos\, n\alpha + i\,\text{sen}\; n\alpha)$
- División: $r_\alpha : s_\beta = (r : s)_{\alpha-\beta}$
- Raíces. Las raíces n-ésimas de un complejo $z = a + bi = r_\alpha$

  tienen la forma: s_β, donde: $\begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \dfrac{\alpha + 360^{o} \cdot k}{n} ; k = 0,1,\ldots,n-1 \end{cases}$

Fórmula de Moivre

$(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^n =$

$= (\cos\; n\alpha + i\,\text{sen}\; n\alpha)$

Un ángulo puede expresarse en grados o en radianes.

Demostraciones

Producto

$r_\alpha \cdot s_\beta = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) \cdot s(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta) =$

$= r \cdot s\,[(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta) + i(\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta)] =$

$= r \cdot s\,[\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta)] = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$

Potencias

$(r_\alpha)^n = (r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha))^n \underset{\text{Moivre}}{=} r^n(\cos\; n\alpha + i\,\text{sen}\; n\alpha) = (r)^n{}_{n\alpha}$

División

$r_\alpha : s_\beta = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) : s(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta) =$

$(r:s)\dfrac{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha}{\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta} \cdot \dfrac{\cos\beta - i\,\text{sen}\,\beta}{\cos\beta - i\,\text{sen}\,\beta} =$

$= \dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta - i\cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta + i\,\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta - i^2\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta}{\cos^2\beta - i^2\,\text{sen}^2\,\beta} =$

$= \dfrac{\cos(\alpha-\beta) + i\,\text{sen}(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta} \quad \dfrac{\cos(\alpha-\beta) + i\,\text{sen}(\alpha-\beta)}{1} =$

$= (r:s)_{\alpha-\beta}$

Raíces. No la demostraremos.

EJEMPLO

Realiza las raíces sextas de la unidad:

El número 1 es un número real, luego su parte imaginaria vale cero.

En forma compleja será: **z = 1 + 0i,** y al pasarlo a forma polar resulta:

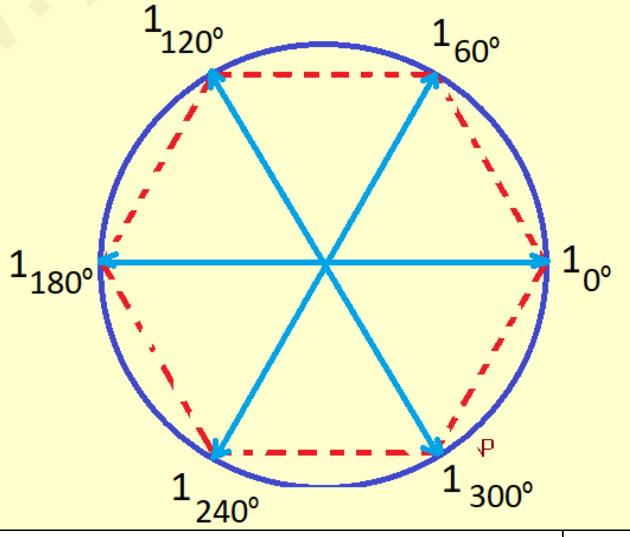
$$\left.\begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \\ \alpha = \text{arctg}\,\dfrac{0}{1} = 0^o \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{z = 1_{0^o}}$$

Sus raíces sextas tienen la forma: s_β, donde: $\left\{\begin{array}{l} s = \sqrt[6]{1} = 1 \\ \beta = \dfrac{0^o + 360^o \cdot k}{6} ; k = 0,1,...,5 \end{array}\right.$

Por tanto:

$$\beta = \frac{0^o + 360^o \cdot k}{6} ; k = 0,1,...,5 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta_1 = \dfrac{360^o \cdot 0}{6} = 0^o \rightarrow \mathbf{z_1 = 1_{0^o}} \\ \beta_2 = \dfrac{360^o \cdot 1}{6} = 60^o \rightarrow \mathbf{z_2 = 1_{60^o}} \\ \beta_3 = \dfrac{360^o \cdot 2}{6} = 120^o \rightarrow \mathbf{z_3 = 1_{120^o}} \\ \beta_4 = \dfrac{360^o \cdot 3}{6} = 180^o \rightarrow \mathbf{z_4 = 1_{180^o}} \\ \beta_5 = \dfrac{360^o \cdot 4}{6} = 240^o \rightarrow \mathbf{z_5 = 1_{240^o}} \\ \beta_6 = \dfrac{360^o \cdot 5}{6} = 300^o \rightarrow \mathbf{z_6 = 1_{300^o}} \end{array}\right.$$

De donde obtenemos el gráfico siguiente (***<u>siempre es un polígono regular</u>***):



Teorema fundamental del álgebra. Ecuaciones.

El **teorema fundamental del álgebra** establece que un polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ con coeficientes complejos de grado n > 0, tiene exactamente n soluciones complejas, contando multiplicidades. Entonces: $P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$.

EJEMPLO

Factoriza $P(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4$

Tiene tres raíces. Probamos con las posibles raíces reales: {±1, ±2, ±4}

	1	-1	4	-4
1		1	0	4
	1	0	4	0

$z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z - 1)(z^2 + 4)$

$z^2 + 4 = 0 \rightarrow z = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\,i$

Por tanto: $P(z) = (z - 1) \cdot (z - 2i) \cdot (z + 2i)$

Notas

- Todo polinomio de **grado impar** con **coeficientes reales**, tiene al menos una raíz real.
- En los **polinomios con coeficientes reales**, las raíces complejas aparecen por parejas. Quiere decir que si una raíz es compleja, su conjugada, también es raíz del polinomio.

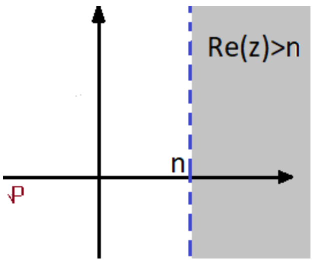
Regiones del plano.

Notas:

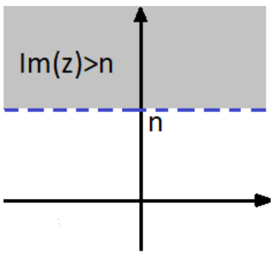
- Recuerda que el trazo debe ser discontinuo si la desigualdad es estricta (<, >) y continuo en caso contrario (≤, ≥).
-

Semiplanos.

Re(z) > n



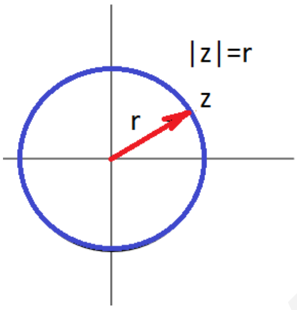
Im(z)>n

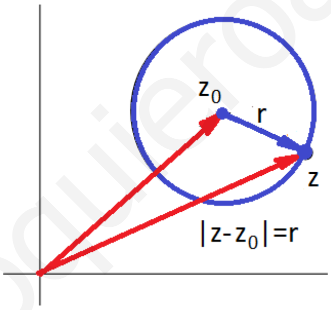


Re(z) es el eje OX.

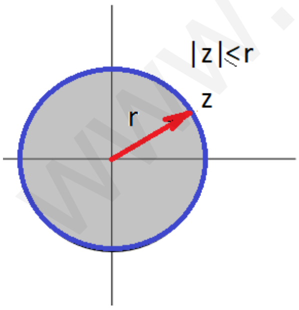
Im(z) es el eje OY.

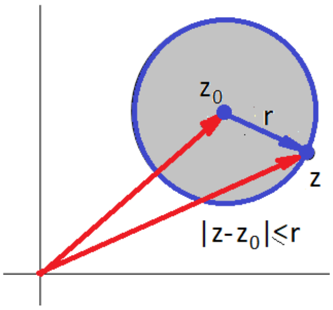
La circunferencia:





El círculo:



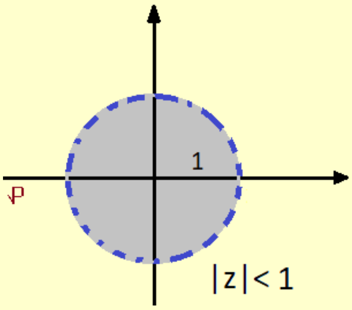


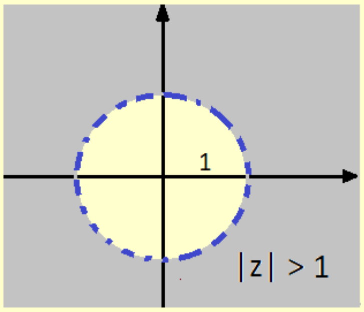
Si la desigualdad es estricta, el borde no formaría parte del lugar geométrico y se dibujaría con trazo discontinuo.

EJEMPLO

Representa las regiones del plano: $|z| < 1$ y $|z| > 1$

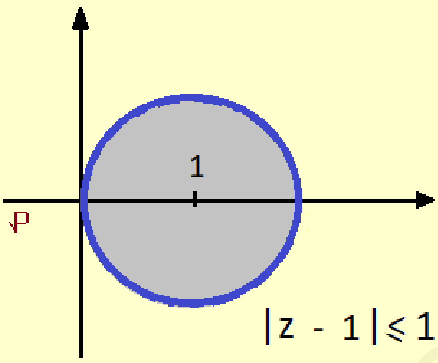
Están centradas en (0,0) y de radio 1. Así:

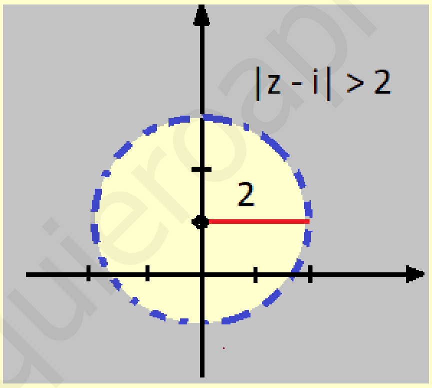




Representa las regiones del plano: $|z - 1| \leq 1$ y $|z - i| > 2$

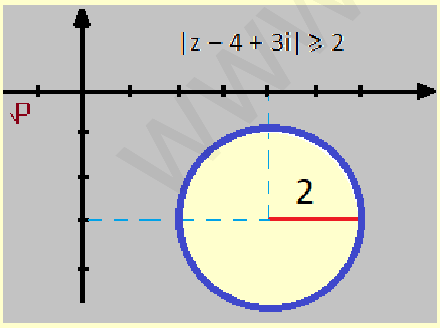
La primera está centrada en (1,0), con radio 1. La segunda en (0,1), con radio 2. Así:

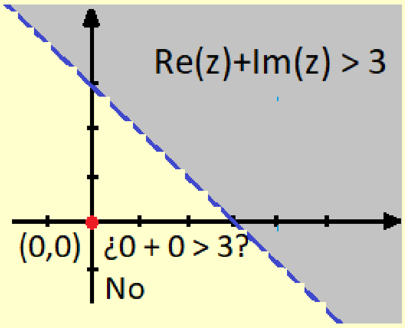




Representa las regiones del plano: $|z - 4 + 3i| \geq 2$ y $Re(z) + Im(z) > 3$.

Está centrada en el punto (4,-3), con radio 2. Así:





Re(z)	Im(z)
0	3
3	0

EJERCICIOS DEL TEMA	Soluciones

1. Realiza:

a. (2 – i) · (1 + 2i) — a) 4 + 3i

b. (2 + i) – i (1 – 2i) — b) 0

c. (3 – 2i) · (3 + 2i) — c) 13

d. $\dfrac{i}{1+i}$ — d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

e. $(1 - i)^4$ — e) -4

f. $\dfrac{2+3i}{1-5i}$ — f) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

g. $\dfrac{5+10i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{i}$ — g) -2

2. Representar en el plano (afijo y vector) los números complejos: a = 2 - i, b = -3i, c = 1 – 2i y d = -3.

3. Demostrar que: si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

4. Calcula el modulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a. $\sqrt{3} - i$

b. –2 – 2i

c. -3i

5. Escribe el complejo z en forma polar y trigonométrica

a. $1 + \sqrt{3}\,i$

b. 4

c. 3i

6. Escribe en forma polar los complejos:

a. 4 + 3i — a) $5_{71,56º}$;

b. -1 + i; — b) $\sqrt{2}_{135º}$;

c. 5 - 12i. — c) $13_{292,6º}$

7. Determinar el valor de k, real, para que $z = (-3 - i)(2 + ki)$:

a. sea un número real.

b. sea un número imaginario puro.

c. tenga módulo igual a $\sqrt{44}$.

a) k = -3/2

b) k = 6

c) $k = \pm\frac{\sqrt{10}}{5}$

8. Realiza: $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)^{120}$

1

9. Resuelve y simplifica:

a. $\frac{(1+2i)^2 \cdot i^{35}}{(3-2i)-(2+i)}$

b. $\frac{(2+i)^{-1} \cdot (2+i)^2}{i^{43} \cdot (3-2i)}$

a) $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

b) $-\frac{7}{13}+\frac{4}{13}i$

10. Calcular z sabiendo que $iz^{-1} = 2 - i$

$-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

11. Realiza: $(1+i)^{20} - (1-i)^{20}$

0

12. Demuestra la fórmula de Moivre para n = 2.

13. Calcula el módulo y el argumento de $z = \frac{-1+i}{-3\sqrt{3}+3i}$

$|z| = \frac{\sqrt{2}}{6}$; arg(z) = 345º

Más fácil pasando a forma polar

14. Calcula los valores de a y b para que:

a. (a + i)·(b – 3i) = 7 – 11i

b. $\frac{3 - ai}{1 + 2i} = b + 2i$

15. Hallar los números complejos tales que su cuadrado es igual a su conjugado (en forma polar).

$z_1 = 1$; $z_2 = 1_{120º}$, $z_3 = 1_{240º}$

16. Realiza

a. $\frac{3_{45º} \cdot 2_{15º}}{6_{30º}}$

b. $\frac{2_{30º} \cdot 3_{60º}}{3_{120º} \cdot 1_{300º}}$

c. $\frac{2_{45º} \cdot 2_{15º}}{4_{90º}}$

a) $1_{30º}$;

b) $2_{30º}$;

c) $1_{330º}$

17. El complejo de argumento 80º y módulo 12 es el producto de dos complejos; uno de ellos tiene de módulo 3 y argumento 50º. Escribe el otro complejo en forma binómica.

18. Calcula las potencias:

a. $[3(\cos 35^\circ + i \operatorname{sen} 35^\circ)]^4$

b. $(\sqrt{2}_{\,30^\circ})^6$

c. $[\sqrt[3]{3}\,(\cos 10^\circ + i \operatorname{sen} 10^\circ)]^6$.

a) 81_{180°

b) $8_{180^\circ} = -8$

c) 9_{60°

19. Calcula las raíces quintas de la unidad. Represéntalas.

1_{0°; 1_{72°; 1_{144°; 1_{216°; 1_{288°

20. Calcula y representa:

a. $\sqrt[3]{-3+3i}$

b. $\sqrt[4]{i}$

c. $\sqrt[5]{-1+i}$

a) $\sqrt[6]{18}_{45^\circ}, \sqrt[6]{18}_{165^\circ}, \sqrt[6]{18}_{285^\circ}$

b) $1_{22,5^\circ}, 1_{112,5^\circ}, 1_{202,5^\circ}, 1_{292,5^\circ}$

c) $\sqrt[10]{2}_{27^\circ}, \sqrt[10]{2}_{99^\circ}, \sqrt[10]{2}_{171^\circ}, \sqrt[10]{2}_{243^\circ}, \sqrt[10]{2}_{315^\circ}$

21. Halla las coordenadas polares de los vértices de un hexágono regular de radio 3 u, sabiendo que un vértice está situado en el eje OX.

3_{0°, 3_{60°, 3_{120°, 3_{180°, 3_{240°, 3_{300°

22. Describe el conjunto de los números complejos que cumplen que $|z + 2i| = \sqrt{10}$

Circunferencia de centro (0,-2) y radio $\sqrt{10}$ u

23. Describir el lugar geométrico de los puntos del plano z = x + iy que verifican:

a. $\mathrm{Re}(z) > 3$

b. $\mathrm{Im}(z) \leq -1$

c. $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \leq 2$

d. $|z| < 3$

e. $|z + 3| = 2$

f. $|z + i| > 1$

g. $|z - 1 + i| \leq 2$

24. Resuelve: $z^3 - 8 = 0$. Expresa las soluciones en forma polar y binómica.

$2_{0^\circ} = 2$, $2_{120^\circ} = -1 + \sqrt{3}i$, $2_{240^\circ} = -1 - \sqrt{3}i$

25. Resuelve, dando las soluciones en forma polar:

a. $z^6 + 64 = 0$

b. $z^3 – 27 = 0$

26. Resolver:

a. $z^2 - 4z + 13 = 0$

b. $z^3 + 4z^2 + 9z + 36 = 0$

c. $z^2 – 2z + 5 = 0$

d. $z^2 – 6z + 13 = 0$

e. $z^2 – 4z + 5 = 0$

27. Resolver el siguiente sistema, donde x e y son números complejos:

a. $\begin{cases} (2+i)x + 2y = 1 + 7i \\ (1-i)x + iy = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} xi + (2+i)y = -3 + 7i \\ (2-i)x + (2+i)y = 5 + 3i \end{cases}$

c. $\begin{cases} (1+2i)x + (1+i)y = 5 + 5i \\ (2+i)x + iy = 2 + 2i \end{cases}$

a) $2_{30º}, 2_{90º}, 2_{150º}, 2_{210º}, 2_{270º}, 2_{330º}$

b) $3; 3_{120}; 3_{240}$

a) $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 2 - 3i$

b) $z_1 = -4$; $z_2 = 3i$, $z_3 = -3i$

c) 1+2i, 1-2i

d) 3+2i, 3-2i

e) 2+i, 2-i

a) x = 1 + i; y = 2i

b) x = 3 + i; y = 2i

c) x = 1 - i; y = 3 + i

TEMA 7 – NÚMEROS COMPLEJOS

Unidad imaginaria	Complejos	Forma binómica	Forma polar	Forma trigonométrica
$i = \sqrt{-1}$	$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$	$z = a + b\,i$	$z = r_\alpha$	$z = a + bi = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$
Afijo	**Parte real/imaginaria**	**De binómica a polar**	**De polar a binómica**	**Fórmula de Moivre**
El afijo de $z = a + bi$ es el punto P(a, b).	Parte real: Re(z) = a. Parte imaginaria: Im(z) = b	$\begin{cases} r = \lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \text{Arg}\, z = \text{arctg}\, \dfrac{b}{a} \end{cases}$	$\begin{cases} a = r\cos\alpha \\ b = r\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$	$(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^n = (\cos n\alpha + i\,\text{sen}\, n\alpha)$

Operaciones - Forma binómica

- **Suma:** (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) i
- El **opuesto** de $z_1 = a + bi$ es $z_2 = -a - bi$.
- **Producto:** (a + bi) · (c + di) = (a·c – b·d) + (a·d + b·c) i
- El **conjugado** del número complejo z = a + bi, se define como: $\overline{z} = a - bi$.
- **División**. Para dividir números complejos se multiplica, numerador y denominador por el conjugado del denominador.

Propiedades de los conjugados

1) $\overline{\overline{z}} = z$
2) $z + \overline{z} = 2\,\text{Re}(z)$
3) $z - \overline{z} = 2\,\text{Im}(z)\,i$
4) $z \cdot \overline{z} = \lvert z \rvert^2$
5) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
6) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
7) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}; z_2 \neq 0$
8) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{\lvert z \rvert^2}; z \neq 0$

Operaciones - Forma polar

- **Producto:** $r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$
- **Potencias:** $(r_\alpha)^n = (r)^n_{n\alpha} = r^n(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\, n\alpha)$
- **División:** $r_\alpha : s_\beta = (r : s)_{\alpha-\beta}$
- Las **raíces n-ésimas** de un complejo $z = a + bi = r_\alpha$ tienen la forma: s_β, donde: $\begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \dfrac{\alpha + 360^\circ \cdot k}{n}; k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$