

EJERCICIOS DE CÁLCULO DE RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS Y POTENCIAS DE i

1) Calcula las siguientes raíces sabiendo que $i^2 = -1$

- a) $\sqrt{-4}$
- b) $\sqrt{-81}$
- c) $\sqrt{-5}$
- d) $\sqrt{-63}$
- e) $\sqrt{-432}$
- f) $\sqrt{-1800}$

Desarrollos:

- a) $\sqrt{-4} = \sqrt{4i^2} = 2i$
- b) $\sqrt{-81} = \sqrt{81i^2} = 9i$
- c) $\sqrt{-5} = \sqrt{5i^2} = i\sqrt{5}$
- d) $\sqrt{-63} = \sqrt{63i^2} = \sqrt{9 * 7 * i^2} = 3i\sqrt{7}$
- e) $\sqrt{-432} = \sqrt{144 * 3 * i^2} = 12i\sqrt{3}$
- f) $\sqrt{-1800} = \sqrt{900 * 2 * i^2} = 30i\sqrt{2}$

2) En el conjunto de los números imaginarios, la unidad imaginaria es $\sqrt{-1}$ y se representa por i . Cuando se desea elevar i a una potencia, se puede proceder de la siguiente manera:

$$i^1 = i$$
$$i^2 = i * i = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

De acuerdo con lo anterior y sabiendo que los resultados sólo pueden ser: i , $-i$, 1 , -1 . ¿Cuál es el valor de las siguientes potencias?

- a) i^3
- b) i^4
- c) i^5
- d) i^{20}
- e) i^{57}
- f) i^{346}

Desarrollos:

- a) $i^3 = i^2 * i = -1 * i = -i$
 b) $i^4 = i^2 * i^2 = -1 * -1 = 1$
 c) $i^5 = i^2 * i^2 * i = -1 * -1 * i = i$
 d) $i^{20} = (i^2)^{10} = (-1)^{10} = 1$
 e) $i^{57} = (i^2)^{28} * i = (-1)^{28} * i = i$
 f) $i^{346} = (i^2)^{173} = (-1)^{173} = -1$

3) Resuelve las siguientes ecuaciones en el conjunto de los números complejos:

- a) $x^2 - 2x = -2$ b) $x^2 + 3 = 0$ c) $x^4 = 1$

Desarrollos:

- a) $x^2 - 2x = -2$

Si aplicamos la fórmula de la ecuación cuadrática ordenando la ecuación de la forma:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{- - 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * 1 * 2}}{2 * 1} \\ & \Rightarrow \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \\ & \Rightarrow \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ & \Rightarrow \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} \\ & \Rightarrow \frac{2 \pm 2i}{2} \\ & \Rightarrow \frac{2(1 \pm i)}{2} \\ & \Rightarrow 1 \pm i \end{aligned}$$

Esto quiere decir que la ecuación tiene dos soluciones: $1 + i$ y $1 - i$

b) $x^2 + 3 = 0$

Si despejamos la ecuación obtenemos:

$$x^2 = -3$$

$$x = \pm\sqrt{-3}$$

$$x = \pm\sqrt{3i^2}$$

$$x = \pm\sqrt{3}i$$

Esto quiere decir que la ecuación tiene dos soluciones: $\sqrt{3}i$ y $-\sqrt{3}i$

c) $x^4 = 1$

Si despejamos la ecuación obtenemos:

$$x^4 = 1$$

$$x = \pm\sqrt[4]{1}$$

Una ecuación de grado 4 tiene 4 soluciones, por lo que buscamos los 4 valores que cumplen la igualdad:

Observemos que:

- $x=1$ cumple ya que $1^4 = 1$
- $x=-1$ también cumple ya que $(-1)^4 = 1$

de la misma forma i y $-i$ también cumplen pues:

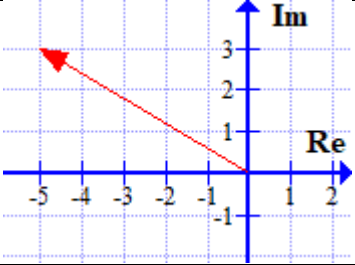
$$i^4 = i^2 * i^2 = -1 * -1 = 1$$

$$(-i)^4 = (i^2 * i)^4 = (i^2)^4 * (i)^4 = (-1)^4 * (i)^4 = 1 * i^2 * i^2 = 1 * -1 * -1 = 1$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación dada son: $\pm 1, \pm i$

EJERCICIOS DE REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS, CÁLCULO DE MÓDULO Y ARGUMENTO

1) Completa la tabla a continuación:

Gráfica	Forma binomial	Forma de par ordenado	Módulo	Argumento
				
	$2 + \frac{3}{5}i$			
		$(-1.5, -6)$		
			5	30°

2) Calcula los valores de x e y para los cuales se verifica la siguiente igualdad:

$$x + y + 1 + (x - y + 3)i = 1 + 7i$$

3) Dado el número complejo $x + 3i$ halle x para que:

- a) tenga módulo 5.
- b) Su argumento sea 60°

Desarrollos:**1) Tabla**

Recuerda que la parte real de un número complejo se representa en el eje x, y la parte imaginaria se representa en el eje y.

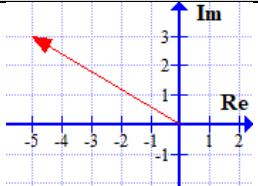
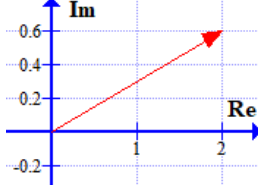
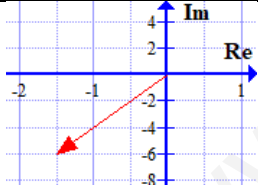
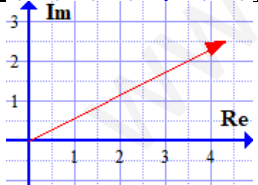
El módulo de un número complejo se calcula:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El argumento $Arg(z)$ de un número complejo es el ángulo que se forma entre el eje real positivo y el vector que representa al complejo dado y se calcula:

$$Arg(z) = Arg(a + bi) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

De acuerdo con lo anterior completamos la tabla:

Gráfica	Forma binomial	Forma de par ordenado	Módulo	Argumento
	$-5 + 3i$	$(-5, 3)$	$\sqrt{34}$	$\approx 149^\circ$
	$2 + \frac{3}{5}i$	$\left(2, \frac{3}{5}\right)$	$\frac{1}{5}\sqrt{109}$	$\approx 16,7^\circ$
	$-1.5 - 6i$	$(-1.5, -6)$	$\frac{3}{2}\sqrt{17}$	$\approx 256^\circ$
	$\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$	$\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$	5	30°

- 2) Calcula los valores de x e y para los cuales se verifica la siguiente igualdad:

$$x + y + 1 + (x - y + 3)i = 1 + 7i$$

Luego la parte real es:

$$x + y + 1 = 1 \Rightarrow x + y = 0$$

La parte imaginaria:

$$x - y + 3 = 7 \Rightarrow x - y = 4$$

Con esto obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Al resolverlo, nos da como respuesta los valores de x e y para que se cumpla la igualdad dada en un principio:

$$x = 2; y = -2$$

- 3) Dado el número complejo $x + 3i$ halle x para que:

a) tenga módulo 5.

$$|x + 3i| = \sqrt{x^2 + 9} \Rightarrow 5 = \sqrt{x^2 + 9} \Rightarrow 25 = x^2 + 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

b) Su argumento sea 60°

$$\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) = 60^\circ \Rightarrow \frac{x}{3} = \tan(60^\circ) \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$$

EJERCICIOS DE OPUESTO Y CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO

- 1) Completa el cuadro a continuación:

Número complejo	Par ordenado	Opuesto	Conjugado
$12 + 7i$			
$4 - i$			
$8 - \sqrt{5}i$			
6			
$9i$			

2) Demuestra:

a) $\bar{\bar{z}} = z$

b) Los módulos de $z, \bar{z}, -z$ son iguales.

Desarrollos:

1) Tabla

Par ordenado: Recuerda que la representación de par ordenado de un número complejo es (x,y) donde x es la parte real e y la parte imaginaria.

Opuesto: el opuesto de un número complejo es el opuesto aditivo tanto de la parte real como de la parte imaginaria.

Conjugado: es el mismo número complejo respecto de su parte real, pero en su parte imaginaria escribimos el opuesto aditivo, en otras palabras, cambiamos el signo sólo de la parte imaginaria.

De acuerdo con lo anterior, completamos la tabla:

Número complejo	Par ordenado	Opuesto	Conjugado
$12 + 7i$	$(12,7)$	$-12 - 7i$	$12 - 7i$
$-4 - i$	$(-4,-1)$	$4 + i$	$-4 + i$
$8 - \sqrt{5}i$	$(8, -\sqrt{5})$	$-8 + \sqrt{5}i$	$8 + \sqrt{5}i$
6	$(6,0)$	-6	6
$9i$	$(0,9)$	$-9i$	$-9i$

2) a) Sea $z = a + bi$, entonces $\bar{\bar{z}} = \overline{a + bi} = \overline{a - bi} = a + bi = z$

b) Sea $z = a + bi$, entonces $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Luego: $|\bar{z}| = |\overline{a + bi}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Y $|-z| = |-a - bi| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Por lo tanto: Los módulos de $z, \bar{z}, -z$ son iguales

EJERCICIOS DE FORMAS DE UN NÚMERO COMPLEJO Y OPERATORIA

Completa la tabla:

Par ordenado	Binomial	Polar	Trigonométrica	Exponencial
$(-2, -3)$				
	$\frac{2}{5} + 8i$			
		$12,5_{158^\circ}$		
			$5cis(286^\circ)$	
				$7e^{i\frac{\pi}{3}}$

Desarrollo:

$$(-2, -3)$$

En forma binomial: $(-2, -3) = -2 - 3i$

Para obtener la forma polar, trigonométrica y exponencial necesitaremos de su módulo y argumento:

El módulo es: $\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

El argumento es: $\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56,3^\circ \Rightarrow \text{Recuerde que está en el tercer cuadrante: } 180^\circ + 56,3^\circ = 236,3^\circ$

Por lo tanto, su forma trigonométrica, polar y exponencial serán las indicadas en la tabla.

En el caso de tener la forma polar o exponencial, pasamos a su forma trigonométrica ya que tenemos el argumento y módulo, por ejemplo:

$$12,5_{158^\circ} = 12,5(\cos 158^\circ + i \sin 158^\circ)$$

Y resolvemos la operación con la calculadora:

$$12,5(\cos 158^\circ + i \sin 158^\circ) = 12,5(-0.93 + 0.37i) \approx -11.6 + 4.7i$$

Obteniendo con esto su forma binomial y por lo tanto su forma de par ordenado.

Solución Tabla: algunos valores han sido aproximados utilizando notación decimal.

Par ordenado	Binomial	Polar	Trigonométrica	Exponencial
$(-2, -3)$	$-2 - 3i$	$\sqrt{13}_{236,3^\circ}$	$\sqrt{13}cis(236,3^\circ)$	$\sqrt{13}e^{1,3\pi i}$
$\left(\frac{2}{5}, 8\right)$	$\frac{2}{5} + 8i$	$8.01_{89,6^\circ}$	$8.01cis(89,6^\circ)$	$8.01e^{0,5\pi i}$
$(-11.6, 4.7)$	$-11,6 + 4,7i$	$12,5_{158^\circ}$	$12,5cis(158^\circ)$	$12,5e^{\frac{79}{90}\pi i}$
$(1.4, -4.8)$	$1,4 - 4,8i$	5_{286°	$5cis(286^\circ)$	$5e^{\frac{143}{90}\pi i}$
$(3.5, 6.1)$	$3,5 + 6,1i$	7_{60°	$7cis(60^\circ)$	$7e^{\frac{\pi}{3}i}$