

Ejercicios de números complejos.

1. Calcular todas las raíces de la ecuación: $x^6 + 1 = 0$

$$x^6 = -1$$

$$x = \sqrt[6]{-1}$$

$$x = \sqrt[6]{1_{180^\circ}}$$

$$\sqrt[6]{1} = 1$$

$$a = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{6} \quad \left\{ \begin{array}{lll} k = 0 & a_1 = 30^\circ & x_1 = 1_{30^\circ} \\ k = 1 & a_2 = 90^\circ & x_2 = 1_{90^\circ} \\ k = 2 & a_3 = 150^\circ & x_3 = 1_{150^\circ} \\ k = 3 & a_4 = 210^\circ & x_4 = 1_{210^\circ} \\ k = 4 & a_5 = 270^\circ & x_5 = 1_{270^\circ} \\ k = 5 & a_6 = 330^\circ & x_6 = 1_{330^\circ} \end{array} \right.$$

2. Realiza las siguientes operaciones:

$$1) \frac{(3_{20^\circ})^3}{2_{60^\circ}} = \frac{27_{60^\circ}}{2_{60^\circ}} = \left(\frac{27}{2} \right)_{0^\circ}$$

$$2) (1+i)^{10} =$$

$$z = 1 + i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$a = \arctan \frac{+1}{+1} = 45^\circ$$

$$z = (\sqrt{2})_{45^\circ}$$

$$(\sqrt{2}_{45^\circ})^{10} = 32_{450^\circ}$$

$$3) (1 + \sqrt{3}i)^6 =$$

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$a = \arctan \frac{+\sqrt{3}}{+1} = 60^\circ$$

$$z = (2)_{60^\circ}$$

$$(2_{60^\circ})^6 = 64_{360^\circ} = 64_0$$

$$4) \sqrt[3]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}} =$$

$$z_1 = 1 - i$$

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\alpha_1 = \arctan \frac{-1}{+1} = 135^\circ$$

$$z_1 = \left(\sqrt{2} \right)_{135^\circ}$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i$$

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\alpha_2 = \arctan \frac{+1}{+\sqrt{3}} = 30^\circ$$

$$z_2 = 2_{30^\circ}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\left(\sqrt{2} \right)_{135^\circ}}{2_{30^\circ}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)_{105^\circ}}$$

$$|z| = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2}{4}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha = \frac{105^\circ + 360^\circ k}{3} \quad \left\{ \begin{array}{ll} k = 0 & \alpha_1 = 35^\circ \\ k = 1 & \alpha_2 = 155^\circ \\ k = 2 & \alpha_3 = 275^\circ \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} z_1 = \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}} \right)_{35^\circ} \\ z_2 = \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}} \right)_{155^\circ} \\ z_3 = \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2}} \right)_{275^\circ} \end{array}$$

3. Resuelve la siguiente raíz, expresando los resultados en forma polar.

$$\sqrt[5]{10+10i}$$

$$z = 10 + 10i$$

$$|z| = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{+10}{+10} = 45^\circ$$

$$z = (10\sqrt{2})_{45^\circ}$$

$$\sqrt[5]{(10\sqrt{2})_{45^\circ}}$$

$$|z'| = \sqrt[5]{(10\sqrt{2})} = \sqrt[10]{200}$$

$$a = \frac{45^\circ + 360^\circ k}{5} \quad \left\{ \begin{array}{lll} k=0 & \alpha_1 = 9^\circ & z'_1 = (\sqrt[10]{200})_{9^\circ} \\ k=1 & \alpha_2 = 81^\circ & z'_2 = (\sqrt[10]{200})_{81^\circ} \\ k=2 & \alpha_3 = 153^\circ & z'_3 = (\sqrt[10]{200})_{153^\circ} \\ k=3 & \alpha_4 = 225^\circ & z'_4 = (\sqrt[10]{200})_{225^\circ} \\ k=4 & \alpha_5 = 297^\circ & z'_5 = (\sqrt[10]{200})_{297^\circ} \end{array} \right.$$

4. Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones $1 + 2i$ y su conjugado.

Sabemos que una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones y conocemos que al sumar las soluciones se obtiene '-b' y al multiplicarlas se obtiene 'c'. Por tanto:

$$x_1 = 1 + 2i$$

$$x_2 = 1 - 2i$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$S = 1 + 2i + 1 - 2i = 2$$

$$P = (1 + 2i) \cdot (1 - 2i) = 1 + 4 = 5$$

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

5. Calcula la siguiente operación, dando el resultado en forma polar. $\frac{(2 - 3i) - (3 + 2i)}{(3 + 2i) - (2 + i)}$

$$\frac{(2-3i)-(3+2i)}{(3+2i)-(2+i)} = \frac{-1-5i}{1+i} = \frac{(-1-5i) \cdot (1-i)}{(1+i) \cdot (1-i)} =$$

$$= \frac{-1+i-5+5i^2}{1-i^2} = \frac{-6-4i}{2} = -3-2i$$

$$z = -3 - 2i$$

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\alpha = \arctg \frac{-2}{-3} = 213^\circ 41' 24''$$

$$z = \left(\sqrt{13} \right)_{213^\circ 41' 24''}$$

6. Calcula el valor de cociente, y representa los afijos de sus raíces cúbicas. $\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$

$$\frac{i^7 - i^{-7}}{2i} = \frac{i^7 - \frac{1}{i^7}}{2i} = \frac{\frac{i^{14} - 1}{i^7}}{2i} = \frac{i^{14} - 1}{2i^8} =$$

$$= \frac{i^2 - 1}{2} = \frac{-1 - 1}{2} = -1$$

$$z = -1$$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\alpha = \arctg \frac{0}{-1} = 180^\circ$$

$$z = 1_{180^\circ}$$

$$\sqrt[3]{1_{180^\circ}}$$

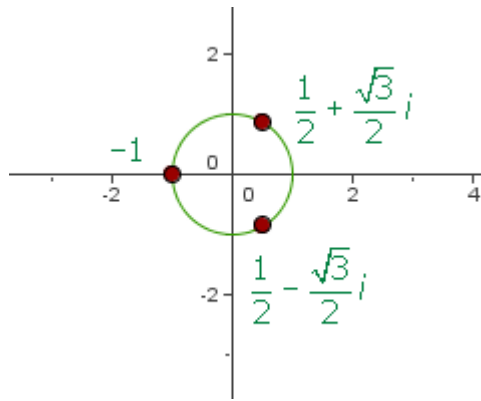
$$|z'| = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$\alpha = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{3} \quad \begin{cases} k=0 \\ k=1 \\ k=2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha_1 = 60^\circ \\ \alpha_2 = 180^\circ \\ \alpha_3 = 300^\circ \end{matrix} \quad \begin{matrix} z'_1 = 1_{60^\circ} \\ z'_2 = 1_{180^\circ} \\ z'_3 = 1_{300^\circ} \end{matrix}$$

$$z'_1 = 1_{60^\circ} = \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z'_2 = 1_{180^\circ} = \cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ = -1$$

$$z'_3 = 1_{300^\circ} = \cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



7. Expresa en forma polar y binómica un complejo cuyo cubo sea: $8\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$

$$8\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = 8(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 8_{90^\circ}$$

$$z^3 = 8_{90^\circ}$$

$$z = \sqrt[3]{8_{90^\circ}}$$

$$|z| = 2$$

$$a = \frac{90^\circ + 360^\circ k}{3} \begin{cases} k = 0 & a_1 = 30^\circ & z'_1 = 2_{30^\circ} \\ k = 1 & a_2 = 150^\circ & z'_2 = 2_{150^\circ} \\ k = 2 & a_3 = 270^\circ & z'_3 = 2_{270^\circ} \end{cases}$$

$$z'_1 = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) = \sqrt{3} + i$$

$$z'_2 = 2_{150^\circ} = 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = -\sqrt{3} + i$$

$$z'_3 = 2_{270^\circ} = 2(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) = -2i$$

8. Calcular todas las raíces de la ecuación: $x^5 + 32 = 0$

$$x^5 + 32 = 0$$

$$x^5 = -32$$

$$x = \sqrt[5]{-32}$$

$$x = \sqrt[5]{32_{180^\circ}}$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2$$

$$a = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{5} \begin{cases} k = 0 & a_1 = 36^\circ & x_1 = 1_{36^\circ} \\ k = 1 & a_2 = 108^\circ & x_2 = 1_{108^\circ} \\ k = 2 & a_3 = 180^\circ & x_3 = 1_{180^\circ} \\ k = 3 & a_4 = 252^\circ & x_4 = 1_{252^\circ} \\ k = 4 & a_5 = 324^\circ & x_5 = 1_{324^\circ} \end{cases}$$

9. Calcula k para que el número complejo que obtenemos de la siguiente división esté representado en la bisectriz del primer cuadrante. $\frac{2+i}{k+i}$

Para que el afijo (a, b), del complejo esté en la bisectriz del primer cuadrante tiene que cumplirse: $a = b$.

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador para realizar el cociente.

$$\begin{aligned}\frac{2+i}{k+i} &= \frac{(2+i) \cdot (k-i)}{(k+i) \cdot (k-i)} = \\ &= \frac{2k - 2i + ki - i^2}{k^2 - i^2} = \frac{(2k+1) + (k-2)i}{k^2+1} = \\ &= \frac{2k+1}{k^2+1} + \frac{k-2}{k^2+1}i\end{aligned}$$

$$\frac{2k+1}{k^2+1} = \frac{k-2}{k^2+1}$$

$$2k+1 = k-2 \quad k = -3$$

10. Halla el valor de k para que el cociente $\frac{2-ki}{k-i}$ sea:

- 1) Un número imaginario puro.

La parte real del número debe ser nula.

$$\begin{aligned}\frac{2-ki}{k-i} &= \frac{(2-ki) \cdot (k+i)}{(k-i) \cdot (k+i)} = \\ &= \frac{2k + 2i - k^2i - ki^2}{k^2 - i^2} = \frac{3k + (2-k^2)i}{k^2+1} = \\ &= \frac{3k}{k^2+1} + \frac{2-k^2}{k^2+1}i\end{aligned}$$

$$\frac{3k}{k^2+1} = 0$$

$$3k = 0 \quad k = 0$$

- 2) Un número real.

La parte imaginaria del número debe ser nula.

$$\frac{2-k^2}{k^2+1} = 0$$

$$2 - k^2 = 0 \quad k = \pm\sqrt{2}$$

11. Se considera el complejo $2 + 2\sqrt{3}i$. Se gira 45° alrededor del origen de coordenadas en sentido contrario a las agujas del reloj. Hallar el complejo obtenido después del giro.

$$z = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$|z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{2} = 60^\circ$$

$$z = 4_{60^\circ}$$

$$4_{60^\circ} \cdot 1_{45^\circ} = 4_{105^\circ}$$

12. Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del complejo 1_{90° .

$$z'_1 = 1_{30^\circ} = \cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$z'_2 = 1_{90^\circ} = \cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ = i = (0, 1)$$

$$z'_3 = 1_{150^\circ} = \cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$z'_4 = 1_{210^\circ} = \cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$z'_5 = 1_{270^\circ} = \cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ = -i = (0, -1)$$

$$z'_6 = 1_{330^\circ} = \cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

13. Determina el valor de a y b para que el cociente $\frac{a+2i}{3+bi}$ sea igual a: $(\sqrt{2})_{315^\circ}$

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}\right)_{315^\circ} &= \sqrt{2} \cdot [\cos 315^\circ + i \operatorname{sen}(315^\circ)] = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \mathbf{1 - i} \end{aligned}$$

$$a + 2i = (1 - i)(3 + bi)$$

$$a + 2i = 3 + b + (-3 + b)i$$

$$a = 3 + b \quad 2 = -3 + b$$

$$\mathbf{a = 8} \quad \mathbf{b = 5}$$

14. ¿Cuáles son las coordenadas del punto que se obtiene al girar 90° , en sentido antihorario alrededor del origen, el afijo del complejo $2 + i$?

$$\begin{aligned} z &= 2 + i = \sqrt{5}_{26,565} \\ z' &= \sqrt{5}_{90+26,565} = \sqrt{5}_{116,565} = \sqrt{5} \cdot \cos 116,565 + \sqrt{5} \cdot \operatorname{sen} 116,565 i = -1 + 2i \end{aligned}$$

15. Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el punto $(0, -2)$.

Escribimos el número en forma polar

$$(0, -2) = -2i$$

$$\alpha = \frac{0^\circ + 360^\circ k}{4} \quad \left\{ \begin{array}{lll} k = 0 & \alpha_1 = 0^\circ & z'_1 = 2_{0^\circ} \\ k = 1 & \alpha_1 = 90^\circ & z'_2 = 2_{90^\circ} \\ k = 2 & \alpha_1 = 180^\circ & z'_3 = 2_{180^\circ} \\ k = 3 & \alpha_1 = 270^\circ & z'_4 = 2_{270^\circ} \end{array} \right.$$

$$z'_1 = 2_{0^\circ} = 2(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ) = 2 = (2, 0)$$

$$z'_2 = 2_{90^\circ} = 2(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 2i = (0, 2)$$

$$z'_3 = 2_{180^\circ} = 2(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) = -2 = (-2, 0)$$

$$z'_4 = 2_{270^\circ} = 2(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) = -2i = (0, -2)$$

16. La suma de los componentes reales de dos números complejos conjugados es seis, y la suma de sus módulos es 10. Determina esos complejos en la forma binómica y polar.

$$\left. \begin{array}{l} z = a + bi \\ \bar{z} = a - bi \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} a + a = 6 \rightarrow a = 3 \\ \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \rightarrow b = 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} z = 3 + 4i \\ \bar{z} = 3 - 4i \end{array} \right\}$$