

Tema 4: Números Complejos



- 1.- Introducción
- 2.- Forma binómica del número Complejo
- 3.- Operaciones en forma binómica
- 4.- Propiedades algebraicas de los números Complejos
- 5.- Forma Polar y trigonométrica del número Complejo
- 6.- Propiedades del módulo, del conjugado y del argumento de un número Complejo.
- 7.- Operaciones en forma Polar
- 8.- Radicación de números Complejos
- 9.- Ecuaciones con números Complejos
- 10.- Ejercicios Resueltos
- 11.- Resumen de Conceptos

4.1.- Introducción

Los **números complejos** conforman un grupo de cifras resultantes de la suma entre un número real y uno de tipo **imaginario**. Un número real, de acuerdo a la definición, es aquel que puede ser expresado por un (4, 15, 2686) o decimal (1,25; 38,1236; 29854,152). En cambio, un número imaginario es aquél cuyo cuadrado es negativo. El concepto de número imaginario fue desarrollado por Leonard Euler en **1.777**, cuando le otorgó a $\sqrt{-1}$ el nombre de **i** (de “**imaginario**”).

Imaginary Numbers Chart
$i^{-3} = i$
$i^{-2} = -1$
$i^{-1} = -i$
$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$i^5 = i$
$i^6 = -1$

The pattern continues...

La noción de número complejo aparece ante la imposibilidad de los números reales de abarcar a las raíces de orden par del conjunto de los números negativos. Los números complejos pueden, por lo tanto, reflejar a **todas las raíces de los polinomios**, algo que los números reales no están en condiciones de hacer.

Gracias a esta particularidad, los números complejos se emplean en diversos campos de las matemáticas, en la física y en la ingeniería. Por su capacidad para representar la corriente eléctrica y las ondas electromagnéticas, por citar un caso, son utilizados con frecuencia en la **electrónica** y las **telecomunicaciones**. Y es que el llamado análisis complejo, o sea la teoría de las funciones de este tipo, se considera una de las facetas más ricas de las matemáticas.

Cabe resaltar que el cuerpo de cada número real está formado por pares ordenados (**a**, **b**). El primer componente (**a**) es la parte real, mientras que el segundo componente (**b**) es la parte imaginaria. Los **números imaginarios puros** son aquellos que sólo están formados por la parte imaginaria (por lo tanto, **a=0**).

Los números complejos componen el denominado cuerpo complejo (\mathbb{C}). Cuando el componente real a es identificado con el correspondiente complejo (**a**, **0**), el cuerpo de estos números reales (\mathbb{R}) se transforma en un subcuerpo de \mathbb{C} . Por otra parte, \mathbb{C} conforma un espacio vectorial de dos dimensiones sobre \mathbb{R} . Esto demuestra que los números complejos no admiten la posibilidad de mantener un orden, a diferencia de los números reales.

Historia de los números complejos

Ya desde el siglo I antes de Cristo, algunos matemáticos griegos, como ser Herón de Alejandría, comenzaron a esbozar el concepto de números complejos, ante **dificultades para construir una pirámide**. Sin embargo, recién en el siglo XVI empezaron a ocupar un lugar importante para la ciencia; en ese momento, un grupo de personas buscaba fórmulas para obtener las raíces de los polinomios de grados 2 y 3.

En primer lugar, su interés era dar con las raíces reales de las ecuaciones antes mencionadas; sin embargo, también debieron enfrentarse a las raíces de números negativos. El famoso filósofo, matemático y físico de origen francés Descartes fue quien creó el término de números imaginarios en el siglo XVII, y

recién más de 100 años más tarde sería aceptado el concepto de los complejos. Sin embargo, fue necesario que Gauss, científico alemán, lo redescubriera un tiempo después para que éste recibiera la atención que merecía.



LENGUAJE MATEMÁTICO

Los números complejos suelen representarse con la letra z .

A la parte real de un número complejo a la llamaremos $\text{Re}(z)$, mientras que a la parte imaginaria b la llamaremos $\text{Im}(z)$.

El conjunto de los números complejos se simboliza mediante la letra \mathbb{C} .

El Plano Complejo

Para interpretar de manera geométrica los números complejos es necesario valerse de un plano complejo. En el caso de su suma, ésta puede ser relacionada con la de los vectores, mientras que su multiplicación es posible expresarla mediante coordenadas polares, con las siguientes características:

- la magnitud de su producto es la multiplicación de las magnitudes de los términos;
- el ángulo que va desde el eje real del producto resulta de la suma de los ángulos de los términos.

A la hora de representar las posiciones de los polos y los ceros de una función en un plano complejo, a menudo se utilizan los denominados diagramas de Argand.

4.2.- Forma binómica del número complejo

4.2.1.- Necesidad de ampliar el conjunto de los números reales.

Al resolver algunas ecuaciones de segundo grado con coeficientes reales se obtienen soluciones o raíces que no son números reales, porque hay que hallar la raíz cuadrada de un número negativo. Para resolver estas ecuaciones se necesita ampliar el conjunto de los números reales.

$$\text{Ejemplo: } x^2 - 4x + 13 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \notin \mathbb{R}$$

4.2.2.- La unidad Imaginaria.

Para poder resolver estas ecuaciones, necesitamos introducir el concepto de unidad imaginaria. Llamamos **unidad imaginaria** a $\sqrt{-1}$ y se representa por la letra **i** (i viene de imaginario).

$$i = \sqrt{-1}$$

Utilizando esta definición, ya podemos hallar las raíces cuadradas de los números negativos, y por tanto resolver las ecuaciones de segundo grado con discriminante negativo que desde la ESO no podemos resolver.

Así que continuando con el ejemplo anterior, ya podemos encontrar sus soluciones:

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36 \cdot (-1)}}{2} = \frac{4 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 + 3i \\ x_2 = 2 - 3i \end{cases}$$

4.2.3.- El conjunto de los números complejos.

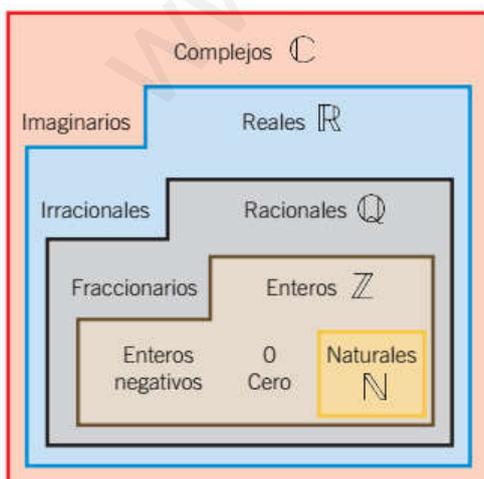
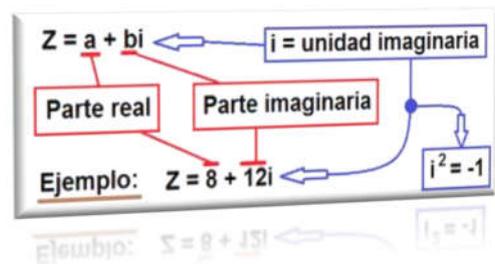
A partir del conjunto de los números reales, se define el **conjunto de los números complejos** de la siguiente manera:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

4.2.3.1.- Forma Binómica de un número Complejo:

Llamamos **forma binómica** de un número complejo a la expresión **a + bi**, donde **a** es la parte real y **b** es la parte imaginaria. También llamadas componente real y componente imaginaria.

- **Si** la parte imaginaria de un número complejo es nula, **b=0**, entonces el número es **real**, por lo que podemos decir que los números reales están contenidos en los números complejos.



- **Si** la parte real de un número complejo es nula, **a=0**, decimos que el número es **imaginario puro**.

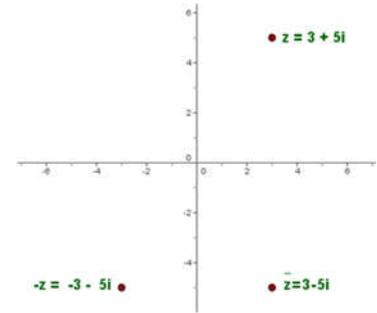
- Dos números complejos son iguales si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

4.2.4.- Representación gráfica de un número Complejo.

Los números complejos se representan en unos ejes de coordenados en el plano, que se llama plano complejo o **plano de Gauss**. La parte real se representa en el eje de abscisas X, que recibe el nombre de **eje real**, y la parte imaginaria en el eje de ordenadas Y, que llamamos **eje imaginario**.

El número complejo $z = a + bi$ se puede representar como un punto de coordenadas P(a,b) (llamado *afijo*) o como un vector de origen en el (0,0) y extremo en (a,b).



4.3.- Operaciones con números complejos en forma binómica

4.3.1.- Suma y resta de números complejos.

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos, para sumar o restarlos en forma binómica se suman o restan las partes reales y las partes imaginarias.

$$z_1 \pm z_2 = (a + bi) \pm (c + di) = \underbrace{(a \pm c)}_{\text{parte real}} + \underbrace{(b \pm d)}_{\text{parte imaginaria}} \cdot i$$

El opuesto de un número complejo se halla cambiando el signo de la parte real y de la parte imaginaria. Si dos números complejos son opuestos, su representación gráfica es simétrica respecto del origen de coordenadas.

4.3.2.- Producto de números complejos.

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos, para multiplicar números complejos en forma binómica, se multiplican como si fueran binomios, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = \underbrace{(ac - bd)}_{\text{parte real}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\text{parte imaginaria}} \cdot i$$

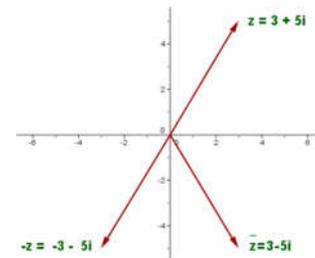
4.3.3.- Conjugado de un número complejo.

El conjugado de un número complejo es el que se obtiene al cambiar el signo de su parte imaginaria. Se representa por \bar{z} . Si dos números complejos son conjugados, su representación gráfica es simétrica respecto del eje de abscisas, o eje real.

$$z = a + bi \quad \rightarrow \quad \bar{z} = a - bi$$

El producto de un número complejo z por su conjugado \bar{z} es un número real y es igual a la suma de los cuadrados de la parte real y la imaginaria.

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$



4.3.4.- División de números complejos.

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ dos números complejos, para dividir números complejos en forma binómica, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} \cdot i$$

4.3.4.1.- Inverso de un número complejo:

Sea $z = a + bi$ un número complejo, no nulo, denotamos z^{-1} al inverso de z y se calcula: $z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$

4.3.5.- Potencias de la unidad imaginaria.

Haciendo las sucesivas potencias de la unidad imaginaria se obtiene:

$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^9 = i^8 \cdot i = i$	$i^{13} = i^{12} \cdot i = i$
$i^2 = i \cdot i = -1$	$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$	$i^{10} = i^9 \cdot i = i \cdot i = -1$	$i^{14} = i^{13} \cdot i = i \cdot i = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$	$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$	$i^{11} = i^{10} \cdot i = -1 \cdot i = -i$	$i^{15} = i^{14} \cdot i = -1 \cdot i = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$	$i^{12} = i^8 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$	$i^{16} = i^8 \cdot i^8 = 1 \cdot 1 = 1$

i^5	$5 \div 4$	1	i^1
i^6	$6 \div 4$	2	i^2
i^7	$7 \div 4$	3	i^3
i^8	$8 \div 4$	0	i^0
i^9	$9 \div 4$	1	i^1
i^{10}	$10 \div 4$	2	i^2
i^{11}	$11 \div 4$	3	i^3
i^{12}	$12 \div 4$	0	i^0
i^{13}	$13 \div 4$	1	i^1

Para calcular cualquier otra potencia de i , basta con dividir la potencia entre cuatro y observar el resto. El resultado es i elevado al resto.

Por ejemplo:

$$i^{322} = i^{\text{resto de la división}} = i^2 = -1$$

$$\begin{array}{r} 322 \mid 4 \\ 02 \ 80 \\ \hline 2 \end{array}$$

4.4.- Propiedades algebraicas de los números complejos

El conjunto de los números complejos con las operaciones de suma y producto tiene estructura de **cuerpo conmutativo**, es decir, que verifica las siguientes propiedades:

- I. **Propiedad asociativa de la suma:** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
- II. **Propiedad conmutativa de la suma:** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- III. Existencia de **elemento neutro** con la suma: $z + 0 = 0 + z = z$, donde $0 = 0 + 0 \cdot i$
- IV. Existencia de **elemento opuesto:** $\forall z = (a + bi) \in \mathbb{C} \exists -z \in \mathbb{C}$, definido como $-z = -a - bi$ y tal que verifica: $z + (-z) = 0$
- V. **Propiedad asociativa del producto:** $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
- VI. **Propiedad conmutativa del producto:** $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- VII. Existencia de **elemento neutro** con el producto: $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$, donde $1 = 1 + 0 \cdot i$
- VIII. Existencia de **elemento inverso:** $\forall z = (a + bi) \in \mathbb{C}^* \exists z^{-1} \in \mathbb{C}$, definido como $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$ y tal que verifica: $z \cdot z^{-1} = 1$
- IX. **Propiedad distributiva con respecto a la suma:** $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

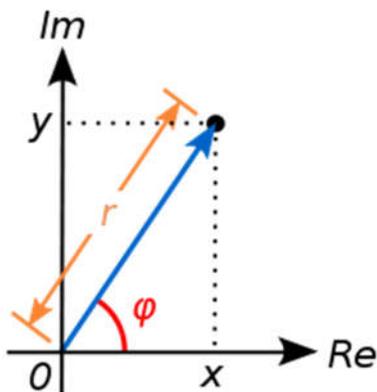
El cuerpo de los números complejos es algebraicamente cerrado. Esto significa que cualquier polinomio de grado n , mayor o igual que 1, con coeficientes reales o complejos tiene al menos una raíz compleja. Este resultado se conoce como **Teorema Fundamental de Álgebra** y fue probado por Gauss en 1799.

Como consecuencia de este teorema se tiene que **cada polinomio de grado n , con coeficientes reales, tiene exactamente n raíces en el campo complejo no necesariamente distintas.**

4.5.- Forma Polar y trigonométrica de un número complejo

4.5.1.- Forma Polar:

Como hemos visto con anterioridad, podemos representar un número complejo con un vector.

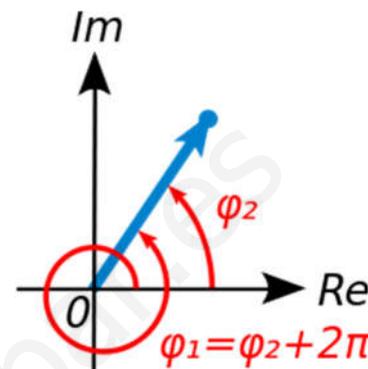


- Llamamos **módulo** de un número complejo $z = a + bi$, y se designa por $\|z\|$ a la longitud del segmento que lo representa en el plano de Gauss, es decir. Módulo de un número complejo es el módulo del vector que lo representa:

$$r = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Llamamos **argumento**, y lo representamos por $\arg(z)$, de un complejo z , con z no nulo, al ángulo que forma el vector con el eje real.

Podemos calcularlo mediante: $\tan \alpha = \frac{b}{a}$



El **argumento principal** de un número complejo es el que está comprendido entre 0° y 360° . Se suele representar por $\text{Arg}(z)$.

- Si $\|z\| = r$ y $\arg(z) = \alpha$, el número complejo se representa: $Z = r_\alpha$

Esta es la forma **módulo-argumental** o **polar** de describir un número complejo.

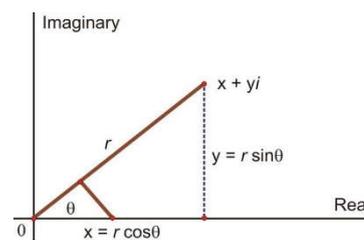
Observa que un número complejo admite infinitos argumentos:

$$r_\alpha = r_{360+\alpha} = r_{720+\alpha} = r_{1080+\alpha} = \dots\dots$$

4.5.2.- Forma trigonométrica

La forma trigonométrica es una variante de la forma polar, porque también utiliza el módulo y el argumento. De la representación gráfica de un número complejo, $z = a + bi$, y utilizando los conocimientos de trigonometría que ya deberíamos haber adquirido, llegamos fácilmente a:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a}{r} &\rightarrow & a = r \cdot \cos \alpha \\ \text{sen} \alpha &= \frac{b}{r} &\rightarrow & b = r \cdot \text{sen} \alpha \end{aligned} \right\} \rightarrow z = r \cos \alpha + r \cdot i \cdot \text{sen} \alpha = r(\cos \alpha + i \cdot \text{sen} \alpha)$$



Expresión que recibe el nombre de **forma trigonométrica** del número complejo z .

4.5.3.- Paso de una forma a otra

Para **pasar de forma binómica a polar o trigonométrica**, basta con hallar el módulo del número complejo y su argumento, en otros casos tendremos que calcular a y b utilizando las razones trigonométricas. Veamos esto con varios ejemplos:

Ejemplo 1: Expresa el número $3(\cos 60^\circ - i \cdot \text{sen} 60^\circ)$ en forma binómica y en forma polar.

No podemos poner directamente la forma polar, porque el signo del paréntesis tiene que ser positivo, y ahora es negativo, así que lo que haremos será un cambio; puesto que $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ y que $\text{sen} \alpha = -\text{sen}(-\alpha)$, podemos escribir:

$$3[\cos(-60^\circ) + i \cdot \text{sen}(-60^\circ)] = 3 \cos(-60^\circ) + i \cdot \text{sen}(-60^\circ) = 3 \left[\frac{1}{2} + i \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$$

Que es su forma binómica. Su forma polar será: $3_{-60^\circ} = 3_{300^\circ}$

Ejemplo 2: Expresa el número 4_{135} en forma binómica y en forma trigonométrica.

4_{135} lo podemos expresar rápidamente en forma trigonométrica $4_{135} = 4(\cos 135^\circ + i \cdot \text{sen} 135^\circ)$.

Sustituyendo el seno y el coseno de 135 por su valor, tenemos: $4_{135} = 4(\cos 135^\circ + i \cdot \text{sen} 135^\circ) = 4 \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ que es su forma binómica.

Ejemplo 3: Expresa el número $z = \sqrt{3} - i$ en forma polar y en forma trigonométrica.

Lo primero es calcular su módulo: $r = \sqrt{3+1} = 2$, su argumento lo calculamos mediante $\alpha = \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}}$, tenemos dos ángulos que cumplen con esta tangente, los ángulos de 150° y el de 330° . Como z tiene su afijo en el cuarto cuadrante, elegimos como argumento el de 330° , y por tanto su forma polar es: 2_{330} , y su forma trigonométrica es $2(\cos 330 + i \operatorname{sen} 330)$.

$$z = \sqrt{3} - i = 2(\cos 330 + i \operatorname{sen} 330) = 2_{330}$$

4.6.- Propiedades del módulo, del conjugado y del argumento de un complejo

Algunas de las propiedades del módulo, del conjugado y del argumento de un número complejo son:

- I. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
- II. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{\overline{z}} = z \quad \operatorname{Arg}(\overline{z}) = -\operatorname{Arg}(z) \quad \operatorname{arg}(\overline{z}) = -\operatorname{arg}(z)$
- III. $z \in \mathbb{R} \quad \leftrightarrow \quad z = \overline{z}$
- IV. $\forall z, w \in \mathbb{C} \quad z \cdot \overline{z} = \|z\|^2 \quad \|\overline{z}\| = \|z\| \quad \|z \cdot w\| = \|z\| \cdot \|w\| \quad \left\| \frac{z}{w} \right\| = \frac{\|z\|}{\|w\|}$
- V. $\|z\| = 0 \quad \leftrightarrow \quad z = 0$
- VI. $\forall z \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
- VII. $\forall z, w \in \mathbb{C} \quad \left| \|z\| - \|w\| \right| \leq \|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$

4.7.- Operaciones con complejos en forma polar

El módulo y el argumento poco tiene que ver con los argumentos y los módulos de los sumandos.

4.7.1.- Producto de complejos en forma polar

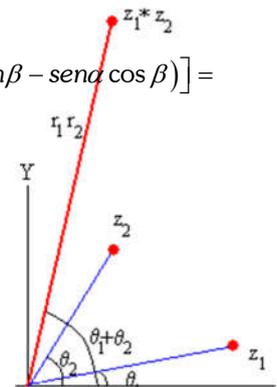
Dados r_α y r_β dos números complejos, el producto de ambos viene dado por:

$$\begin{aligned} r_\alpha r_\beta &= r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot r'(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) = r r' [(\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) - i(\cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta)] = \\ &= r r' [\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)] = (r r')_{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

Por tanto, el producto de dos números complejos es otro número complejo tal que:

- Su módulo es el producto de los módulos.
- Su argumento es la suma de sus argumentos.

$$r_\alpha \cdot r'_\beta = (r r')_{\alpha + \beta}$$

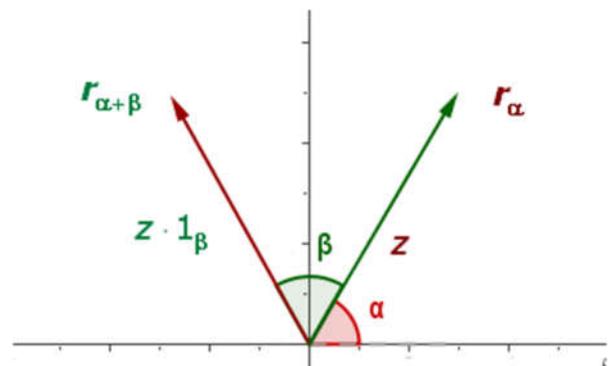


4.7.2.- Producto por un complejo de módulo 1

Al multiplicar un número complejo $z = r_\alpha$ por 1_β , se produce un giro de dicho número complejo, z , un ángulo β alrededor del origen de coordenadas.

$$r_\alpha \cdot 1_\beta = r_{\alpha + \beta}$$

Ejemplos: $3_{60^\circ} \cdot 2_{45^\circ} = 6_{105^\circ}$
 $\sqrt{3}_{135^\circ} \cdot 1_{270^\circ} = \sqrt{3}_{405^\circ} = \sqrt{3}_{45^\circ}$
 Se puede generalizar a tres o más complejos:
 $\sqrt{3}_{120^\circ} \cdot 2_{150^\circ} \cdot \sqrt{3}_{90^\circ} = 6_{360^\circ} = 6_{0^\circ}$



4.7.3.- División de dos números complejos

Dados r_α y r_β dos números complejos, el cociente de ambos viene dado por:

$$\frac{r_\alpha}{r_\beta} = \frac{r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}{r'(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)} = \frac{r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \cdot (\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta)}{r'(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)(\cos \beta - i \operatorname{sen} \beta)} = \frac{r(\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + i(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)}{r'(\cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta)} =$$

$$= \frac{r}{r'} [\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta)] = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha - \beta}$$

Por tanto, La división de dos números complejos es otro número complejo tal que:

Su módulo es el cociente de los módulos.

- Su argumento es la diferencia de los argumentos.

$$\frac{r_\alpha}{r_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha - \beta}$$

Ejemplos: $\frac{6_{85^\circ}}{3_{20^\circ}} = 2_{65^\circ}$

$$\frac{\sqrt{2}_{90^\circ}}{2_{120^\circ}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{-30^\circ} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_{330^\circ}$$

4.7.4.- Potencias de un número complejo

Al elevar un número complejo a una potencia natural, n, su módulo se eleva a n (r^n) y su argumento se multiplica por α , ($n\alpha$).

$$(r_\alpha)^n = r_\alpha r_\alpha r_\alpha r_\alpha r_\alpha \dots = (r r r r r \dots)_{\alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \dots} = (r^n)_{n\alpha}$$

Observación: Los afijos de las potencias sucesivas de $z = r_\alpha$ $z^2 = (r^2)_{2\alpha}$ $z^3 = (r^3)_{3\alpha}$ describen espirales que se cierran si $r < 1$, o se abren si $r > 1$. Si $r = 1$, describen una circunferencia.

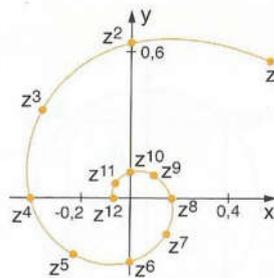


Fig. 9.8.
Potencias de $z = 0,8_{45^\circ}$.

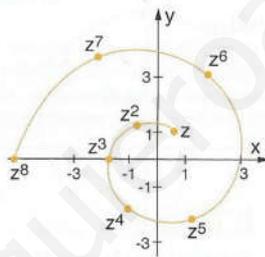


Fig. 9.9.
Potencias de $z = 1,2_{90^\circ}$.

Ejemplos: $(2_{30^\circ})^3 = (2^3)_{90^\circ} = 8_{90^\circ}$

$$(\sqrt{3}_{135^\circ})^4 = \left[(\sqrt{3})^4\right]_{4 \cdot 135^\circ} = 9_{540^\circ} = 9_{180^\circ}$$

4.7.4.1.- Fórmula de Moivre:

Si la fórmula $(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$ la expresamos en forma trigonométrica, obtenemos:

$$[r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = r^n [\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)]$$

Si $r = 1$, resulta la **fórmula de Moivre**:

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)$$

Esta fórmula nos permite obtener resultados trigonométricos ya conocidos de manera más rápida. Por ejemplo si $n = 2$, aplicando la fórmula de Moivre tenemos:

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^2 = \cos(2\alpha) + i \operatorname{sen}(2\alpha)$$

De donde desarrollando, llegamos a:

$$(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^2 = \cos^2 \alpha + i^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 2i \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha + 2i \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \cos(2\alpha) + i \operatorname{sen}(2\alpha)$$

Si igualamos la parte real y la imaginaria:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \qquad \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

Que son las fórmulas del ángulo doble.

Ejercicio: Expresa $\cos(3\alpha)$ y $\sin(3\alpha)$ en función del seno y del coseno de α , ayudándote de la fórmula de Moivre.

Sol: $\sin(3\alpha) = \sin(\alpha)(4\cos^2\alpha - 1)$; $\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos \alpha$

4.8.- Radicación de números complejos

Si n es un número natural, se llama raíz n -ésima del número complejo z a todo número complejo z' tal que $(z')^n = z$, se escribe $\sqrt[n]{z} = z'$

Expresando los números z y z' en forma polar, si $z = r_\alpha$ y $z' = s_\beta$,

$$\sqrt[n]{z} = z' \Leftrightarrow \sqrt[n]{r_\alpha} = s_\beta \Leftrightarrow r_\alpha = (s_\beta)^n \Rightarrow r_\alpha = (s^n)_{n\beta}$$

Por la igualdad de números complejos en forma polar:

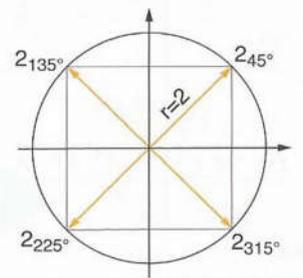
$$r_\alpha = (s^n)_{n\beta} \rightarrow \begin{cases} s^n = r \\ n\beta = \alpha + 360 \cdot k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \sqrt[n]{r} \\ \beta = \frac{\alpha + 360 \cdot k}{n} \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \end{cases}$$

Observa que un número complejo $z = r_\alpha$:

- Tiene n raíces n -ésimas (en particular un número real también tendrá n raíces n -ésimas, algunas de las cuales pueden ser reales)
- Todas ellas tienen el mismo módulo, $\sqrt[n]{r}$ y sus argumentos forman una progresión aritmética, de diferencia $\frac{360}{n}$.
- Por lo tanto, si $n > 2$, los afijos de dichas raíces, son los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia de radio el módulo común.

Por ejemplo, las raíces cuartas de -16 son:

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{180+360k}{4}} = \begin{cases} 2_{45^\circ} & (\text{Tomando } k = 0) \\ 2_{135^\circ} & (\text{Tomando } k = 1) \\ 2_{225^\circ} & (\text{Tomando } k = 2) \\ 2_{315^\circ} & (\text{Tomando } k = 3) \end{cases}$$

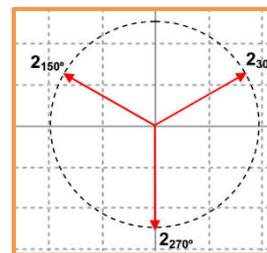


Estas cuatro raíces están situadas sobre una circunferencia de radio 2 y son los vértices de un cuadrado inscrito en ella.

Ejemplo 13: Hallar $\sqrt[3]{8_{90^\circ}}$

$$\sqrt[3]{8_{90^\circ}} = R_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \beta = \frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{3} = 30^\circ + k \cdot 120^\circ; k = 0 \rightarrow \beta = 30^\circ \\ k = 1 \rightarrow \beta = 150^\circ \\ k = 2 \rightarrow \beta = 270^\circ \end{cases}$$

Soluc: $2_{30^\circ}, 2_{150^\circ}, 2_{270^\circ}$



4.9.- Ecuaciones con números complejos

A diferencia de lo que ocurría con las ecuaciones con coeficientes reales, en el conjunto de los números complejos siempre es posible encontrar las soluciones de cualquier ecuación algebraica. Además, el número de soluciones de una ecuación, coincide con el grado de dicha ecuación.

Este resultado fue demostrado por Gauss y recibe el nombre de **Teorema fundamental del álgebra**, que dice: "Toda ecuación algebraica de grado n , con coeficientes reales o complejos, tiene n raíces en el conjunto de números complejos."

Para resolver estas ecuaciones se utilizan los mismos recursos que si tuviesen coeficientes reales. Veamos algunos ejemplos:

1) Para resolver la ecuación $(1 - 3i)z = 2 + 5i$ basta con despejar la incógnita z . Su valor será:

$$z = \frac{2 + 5i}{1 - 3i} \rightarrow z = \frac{2 + 5i}{1 - 3i} \cdot \frac{1 + 3i}{1 + 3i} = \frac{13}{10} + \frac{11}{10}i$$

2) Para resolver la ecuación $z^3 - 2z + 4 = 0$ puede factorizarse (por ejemplo usando Ruffini) y obtenemos:

$$(z + 2)(z^2 - 2z + 2) = 0 \text{ cuya solución se halla resolviendo: } \begin{cases} z + 2 = 0 \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2 \\ z = 1 \pm i \end{cases} \text{ por tanto,}$$

la ecuación tiene tres raíces: $z_1 = -2$ $z_2 = 1 + i$ $z_3 = 1 - i$

3) Para resolver la ecuación $z^4 - 81 = 0$ basta con despejar, obteniéndose:

$$z = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{81}_{0^\circ} = 3 \frac{0+360k}{4} = \begin{cases} 3_{0^\circ} = 3 \\ 3_{90^\circ} = 3i \\ 3_{180^\circ} = -3 \\ 3_{270^\circ} = -3i \end{cases}$$

4.10.- Ejercicios resueltos

1.- Halla las soluciones de la ecuación: $z^4 + (1 - \sqrt{3}i) = 0$

Despejando z , tenemos: $z^4 = -1 + \sqrt{3}i$

Si escribimos $-1 + \sqrt{3}i$, en forma polar: $\begin{cases} r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \arg Z = \arctan \frac{\sqrt{3}}{-1} = -60^\circ \end{cases}$, como estamos en el segundo cuadrante, \arg

$Z = 120^\circ$, por tanto:

$$-1 + \sqrt{3}i = 2_{120^\circ}$$

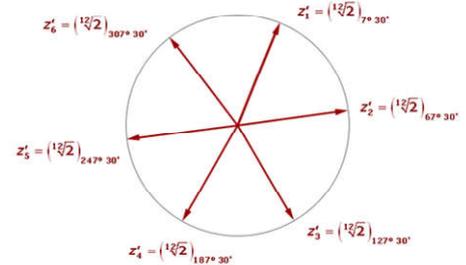
Por tanto, la ecuación queda: $z^4 = 2_{120} \rightarrow z = \left(\sqrt[4]{2}\right)_{\frac{120+360k}{4}} \rightarrow \begin{cases} \text{si } k = 0; z_1 = \left(\sqrt[4]{2}\right)_{30} \\ \text{si } k = 1; z_1 = \left(\sqrt[4]{2}\right)_{120} \\ \text{si } k = 2; z_1 = \left(\sqrt[4]{2}\right)_{210} \\ \text{si } k = 3; z_1 = \left(\sqrt[4]{2}\right)_{300} \end{cases}$

2.- Calcula $\sqrt[6]{(\sqrt{2})}_{45^\circ}$

El módulo de dicho número complejo es: $|z| = \sqrt[6]{(\sqrt{2})} = \sqrt[12]{2}$

Y el argumento es:

$$\alpha = \frac{45^\circ + 360k}{6} \begin{cases} k = 0 \rightarrow \alpha_1 = 7^\circ 30' \rightarrow z'_1 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{7^\circ 30'} \\ k = 1 \rightarrow \alpha_2 = 67^\circ 30' \rightarrow z'_1 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{67^\circ 30'} \\ k = 2 \rightarrow \alpha_3 = 127^\circ 30' \rightarrow z'_1 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{127^\circ 30'} \\ k = 3 \rightarrow \alpha_4 = 187^\circ 30' \rightarrow z'_1 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{187^\circ 30'} \\ k = 4 \rightarrow \alpha_5 = 247^\circ 30' \rightarrow z'_1 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{247^\circ 30'} \\ k = 5 \rightarrow \alpha_1 = 307^\circ 30' \rightarrow z'_1 = \left(\sqrt[12]{2}\right)_{307^\circ 30'} \end{cases}$$



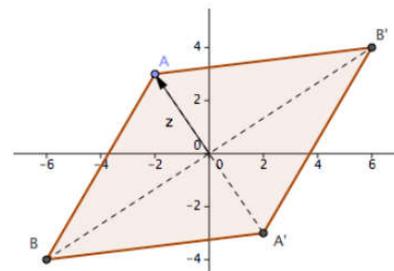
Si representamos las soluciones, tenemos el gráfico de la derecha.

3.- Un rombo tiene su centro en el origen de coordenadas y su diagonal mayor de doble longitud que su diagonal menor. Uno de los vértices de la diagonal menor es el punto correspondiente al número complejo $-2 + 3i$. Averigua los afijos correspondientes al resto de los vértices del rombo.

Si llamamos A al vértice $-2+3i$, como es un rombo (cuadrilátero) las soluciones se diferencian en un argumento de 90° . Para conseguir el vértice B, como A está en la diagonal menor, para calcularlo, multiplicamos por el número complejo de módulo 2 (porque la diagonal mayor es doble de la menor) y argumento 90° , es decir:

$$B = (-2 + 3i) \cdot 2_{90^\circ} = (-2 + 3i) \cdot 2i = -4i + 6i^2 = -4i - 6 \rightarrow B(-6, -4)$$

Los otros vértices A' y B' son los afijos de los opuestos de los otros dos vértices, es decir: A'(2,-3) y B'(6,4).



Por tanto los vértices son: **A(-2,3); B(-6-4); A'(2,-3) y B'(6,4)**

4.- Hallar el valor de x para que $\frac{2-xi}{1-3i}$ a) Sea un número real, b) sea imaginario puro y c) su representación esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

Si multiplicamos arriba y abajo por el conjugado del denominador, llegamos a:

$$\frac{2-xi}{1-3i} \cdot \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{2+6i-xi-3xi^2}{1-9i^2} = \frac{2+3x}{10} + \frac{6-x}{10}i$$

- a) Para que sea un número real, la parte imaginaria ha de ser nula: $6-x=0 \rightarrow x=6$
- b) Para que sea imaginario puro, la parte real ha de ser nula: $2+3x=0 \rightarrow x=-\frac{2}{3}$
- c) Para que esté en la bisectriz del 1º y 3º cuadrante, la parte real y la imaginaria han de ser iguales:

$$2+3x=6-x \rightarrow 4x=4 \rightarrow x=1$$

5.- Los afijos de las raíces de un número complejo son vértices de un octógono regular inscrito en una circunferencia de centro en O y radio 2; sabiendo que el argumento de unas de las raíces es 45° . Hallar el número complejo y las restantes raíces.

Si una de las raíces es 2_{45° , como sabemos que son 8, quiere decir que cada una de ellas se consigue girando $\frac{360}{8} = 45^\circ$ grados con respecto al primer vértice, por tanto:

$$V_1 = 2_{45^\circ} \quad V_2 = 2_{45^\circ} \cdot 1_{45^\circ} = 2_{90^\circ} \quad V_3 = 2_{90^\circ} \cdot 1_{45^\circ} = 2_{135^\circ} \quad V_4 = 2_{135^\circ} \cdot 1_{45^\circ} = 2_{180^\circ}$$

$$V_5 = 2_{180^\circ} \cdot 1_{45^\circ} = 2_{225^\circ} \quad V_6 = 2_{225^\circ} \cdot 1_{45^\circ} = 2_{270^\circ} \quad V_7 = 2_{270^\circ} \cdot 1_{45^\circ} = 2_{315^\circ} \quad V_8 = 2_{315^\circ} \cdot 1_{45^\circ} = 2_0$$

Para hallar de qué número complejo son solución estas raíces, basta con elevar a 8 cualquiera de ellas:

$$\sqrt[8]{Z} = 2_{45} \leftrightarrow Z = (2_{45})^8 \rightarrow Z = (2^8)_{45 \cdot 8} = (2^8)_{360} = (2^8)_0 = 2^8 = 256$$

6.- El producto de dos números complejos es -8 y el primero es igual al cuadrado del segundo. Calcula ambos números.

Sean w y z dichos números complejos, y según los datos del problema, obtenemos el sistema: $\begin{cases} zw = -8 \\ z = w^2 \end{cases}$

Si sustituimos y operamos un poco:

$$w = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180^\circ}} = 2_{\frac{180^\circ+360k}{3}} = 2_{60^\circ+120k}$$

Donde k = 0, 1, 2,...

Por tanto, tenemos tres soluciones:

$$\begin{cases} w_1 = 2_{60^\circ} & \rightarrow & z_1 = (2_{60^\circ})^2 = 4_{120^\circ} \\ w_2 = 2_{180^\circ} & \rightarrow & z_2 = (2_{180^\circ})^2 = 4_{360^\circ} = 4_{0^\circ} = 4 \\ w_3 = 2_{300^\circ} & \rightarrow & z_3 = (2_{300^\circ})^2 = 4_{600^\circ} = 4_{240^\circ} \end{cases}$$

**7.- De dos números complejos sabemos que tienen el mismo módulo, igual a 2, que sus argumentos suman $\frac{17\pi}{6}$ y además que el primero es opuesto del segundo
¿Cuáles son esos números?**

Sean $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$ dichos números complejos, según el enunciado tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} r = s = 2 \\ \alpha + \beta = \frac{17\pi}{6} \end{array} \right\} \text{ como son opuestos } \beta = \alpha - \pi \quad \rightarrow \quad \alpha + \alpha - \pi = \frac{17\pi}{6} \quad \rightarrow \quad 2\alpha = \frac{17\pi}{6} + \pi \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{23\pi}{12}$$

Y por tanto:

$$\beta = \alpha - \pi = \frac{23\pi}{12} - \pi = \frac{11\pi}{12}$$

Así que los números pedidos son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 2_{\frac{23\pi}{12}} \\ \beta_1 = 2_{\frac{11\pi}{12}} \end{array} \right. \text{ o bien } \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 2_{\frac{11\pi}{12}} \\ \beta_2 = 2_{\frac{23\pi}{12}} \end{array} \right.$$

8.- Halla dos números complejos conjugados cuya suma sea 8 y la suma de sus módulos sea 10.

Si llamamos z al número complejo, su conjugado será \bar{z} , así que, con los datos del problema podremos escribir el siguiente sistema:

$$\begin{cases} z + \bar{z} = 8 \\ |z| + |\bar{z}| = 10 \end{cases} \rightarrow \text{ como } |z| = |\bar{z}| \rightarrow \text{ entonces } \rightarrow 2|z| = 10 \rightarrow |z| = 5$$

Si escribimos los complejos en forma binómica: $\begin{cases} z = a + bi \\ \bar{z} = a - bi \end{cases}$

de la ecuación (1):

$$(a + bi) + (a - bi) = 8 \quad \rightarrow \quad 2a = 8 \quad \rightarrow \quad a = 4$$

Y de $|z| = 5$:

$$|z| = |\bar{z}| = 5 \quad \rightarrow \quad \sqrt{4^2 + b^2} = 5 \quad \rightarrow \quad 16 + b^2 = 25 \quad \rightarrow \quad 9 = b^2 \quad \rightarrow \quad b = \pm 3$$

Por tanto, tenemos dos soluciones:

$$\begin{array}{ll} z_1 = 4 + 3i & \text{y} \quad \bar{z}_1 = 4 - 3i \\ z_2 = 4 - 3i & \text{y} \quad \bar{z}_2 = 4 + 3i \end{array}$$

4.11.- Resumen de Conceptos

