1. **[2 puntos]** Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, determina los valores de $a$, $b$ y $c$ sabiendo que $f$ tiene un mínimo relativo en el punto $x=1$ y un punto de inflexión en $(-1,5)$.

2. Tras la aparición de una cierta enfermedad infecciosa, el número de afectados viene dado por la función $p(t)=48t^2-2t^3$, siendo $t$ el número de días desde que se detectó el primer caso. Se pide

   a) **[1 punto]** ¿Cuántos días transcurrirán hasta que la enfermedad deje de propagarse?

   b) **[1 punto]** ¿Cuándo aumenta el número de personas afectadas? ¿Cuándo disminuye?

   c) **[1 punto]** ¿Cuándo se detecta el número máximo de personas afectadas? ¿Cuántas son las personas afectadas en ese momento?

3. Al 65% de los alumnos de un Instituto les gusta la música latina. Al 25% les gusta la música clásica y sólo al 10% les gusta los dos tipos de música. Se elige al azar uno de estos alumnos. Calcular la probabilidad de que:

   a) **[1 punto]** Le guste la música latina o la música clásica.

   b) **[1 punto]** No le guste ni la música latina ni la música clásica.

   c) **[1 punto]** Le guste solamente la música latina.

4. El 62% de los estudiantes de un instituto son chicas y el resto son chicos. Padecen miopía el 12% de las chicas y el 25% de los chicos. Se elige a un estudiante al azar y se observa si padece o no padece miopía.

   a) **[0,5 puntos]** Nombrando a cada suceso de manera adecuada, elabora un diagrama de árbol que describa la totalidad del experimento aleatorio.

   b) **[0,5 puntos]** Hallar la probabilidad de que el estudiante sea chica y padezca miopía.

   c) **[1 punto]** Hallar la probabilidad de que el estudiante no padezca miopía.

***Soluciones***

1. **[2 puntos]** Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, determina los valores de $a$, $b$ y $c$ sabiendo que $f$ tiene un mínimo relativo en el punto $x=1$ y un punto de inflexión en $(-1,5)$.

   La derivada de $f$ es $f'(x)=3x^2+2ax+b$. Y la segunda derivada de $f$ es $f''(x)=6x+2a$.

   Como $f$ tiene un mínimo relativo en el punto $x=1$, tenemos que $f'(1)=0$, es decir:

   $3\cdot 1^2+2a\cdot 1+b=0\Rightarrow 3+2a+b=0\Rightarrow 2a+b=-3$.

   Como $f$ tiene un punto de inflexión en $(-1,5)$ podemos afirmar dos cosas:

   $f(-1)=5\Rightarrow(-1)^3+a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=5\Rightarrow -1+a-b+c=5\Rightarrow a-b+c=6$.

   $f''(-1)=0\Rightarrow 6\cdot(-1)+2a=0\Rightarrow -6+2a=0\Rightarrow 2a=6\Rightarrow a=3$.

   Sustituyendo en $2a+b=-3$ tenemos: $2\cdot 3+b=-3\Rightarrow 6+b=-3\Rightarrow b=-9$.

   Y sustituyendo en $a-b+c=6$ tenemos: $3-(-9)+c=6\Rightarrow 12+c=6\Rightarrow c=-6$.

2. Tras la aparición de una cierta enfermedad infecciosa, el número de afectados viene dado por la función $p(t)=48t^2-2t^3$, siendo $t$ el número de días desde que se detectó el primer caso con $t\geq 0$. Se pide

   a) **[1 punto]** ¿Cuántos días transcurrirán hasta que la enfermedad deje de propagarse?

   b) **[1 punto]** ¿Cuándo aumenta el número de personas afectadas? ¿Cuándo disminuye?

   c) **[1 punto]** ¿Cuándo se detecta el número máximo de personas afectadas? ¿Cuántas son las personas afectadas en ese momento?

   En primer lugar, hallemos la derivada de $p$: $p'(t)=96t-6t^2$. Ahora resolvamos la ecuación $p'(t)=0$:

   $96t-6t^2=0\Rightarrow t(96-6t)=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\96-6t=0\Rightarrow t=16\end{cases}$. De aquí se deduce que los posibles extremos relativos de la función son $t=0$ y $t=16$.

   a) La enfermedad dejará de propagarse cuando el número de afectados sea igual a cero, es decir, cuando $p(t)=0$. Por tanto: $48t^2-2t^3=0\Rightarrow t^2(48-2t)=0\Rightarrow\begin{cases}t^2=0\Rightarrow t=0\\48-2t=0\Rightarrow t=24\end{cases}$. Esto indica que la enfermedad dejará de propagarse cuando pasen 24 días (la solución $t=0$ hay que descartarla pues esta indica que, justo al principio, tampoco había ningún afectado). También sabemos por lo anterior que el intervalo en el que tenemos que hacer el estudio es $[0,24]$.

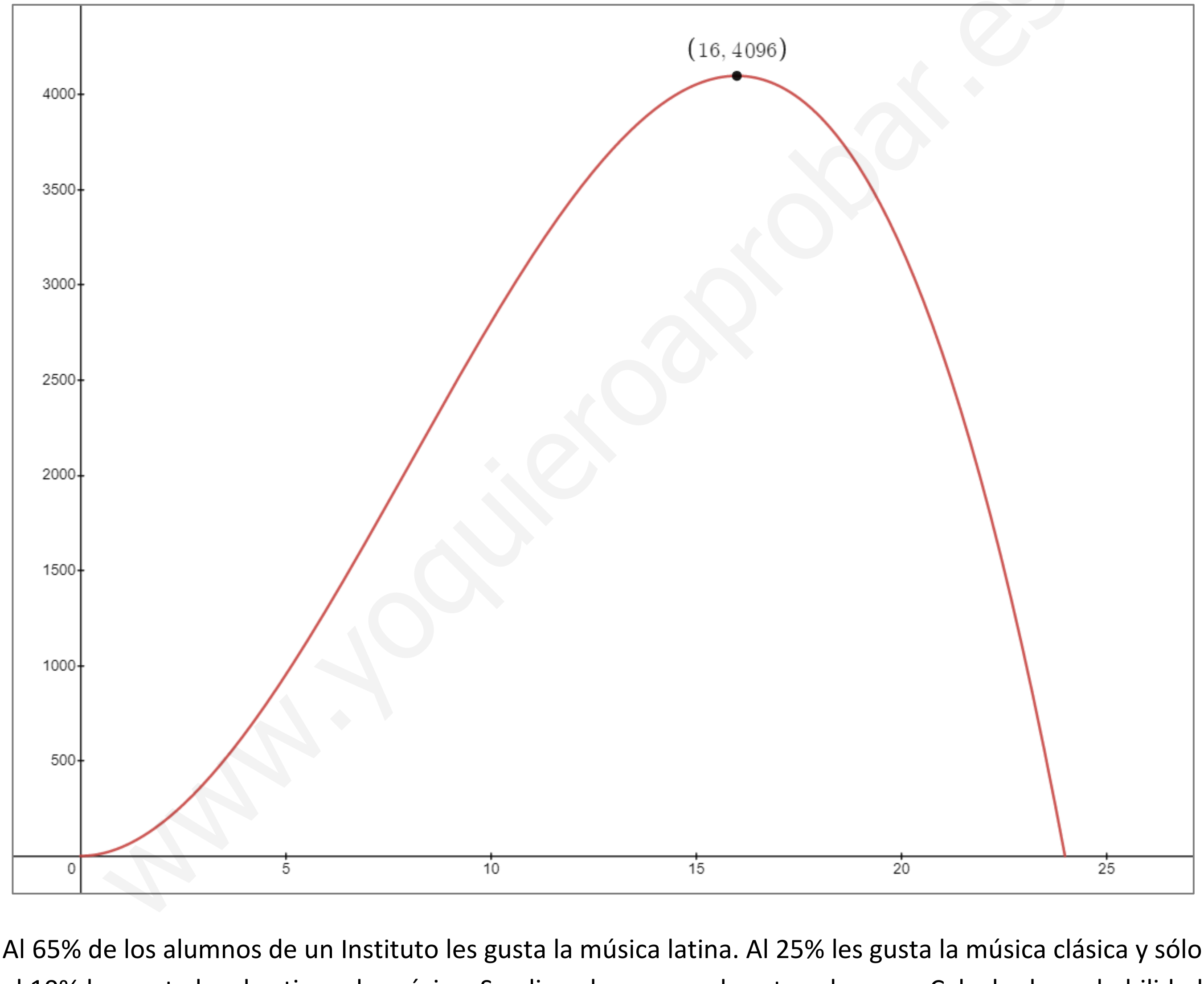
   b) Hagamos una tabla que nos ayude a contestar a este apartado.

| | $(0,16)$ | $(16,24)$ |
|---|---|---|
| Signo de $p'$ | $+$ | $-$ |
| $p$ | $\uparrow\uparrow$ | $\downarrow\downarrow$ |

De la tabla anterior se desprende que $p$ es creciente en el intervalo $(0,16)$ y decreciente en el intervalo $(16,24)$. Es decir, el número de personas afectadas aumentas durante los 16 primeros días y disminuye entre el día 16 y el día 24.

c) De la tabla también deducimos que $x=16$ es un máximo de la función porque en este punto la función pasa de ser creciente a ser decreciente. Por tanto, el número máximo de personas afectadas se da justo a los 16 días de la aparición de la enfermedad. Las personas afectadas en ese momento son: $p(16)=48\cdot 16^2-2\cdot 16^3=12288-8192=4096$ personas.

Todo lo anterior se aprecia muy bien en la gráfica de la función (aunque esto no hay que hacerlo):




3. Al 65% de los alumnos de un Instituto les gusta la música latina. Al 25% les gusta la música clásica y sólo al 10% les gusta los dos tipos de música. Se elige al azar uno de estos alumnos. Calcular la probabilidad de que:

a) **[1 punto]** Le guste la música latina o la música clásica.

b) **[1 punto]** No le guste ni la música latina ni la música clásica.

c) **[1 punto]** Le guste solamente la música latina.

Llamemos $L$ al suceso “gustar la música latina” y $C$ al suceso “gustar la música clásica”. Entonces el enunciado del problema proporciona los siguientes datos: $P(L)=0,65$, $P(C)=0,25$, $P(L\cap C)=0,1$.

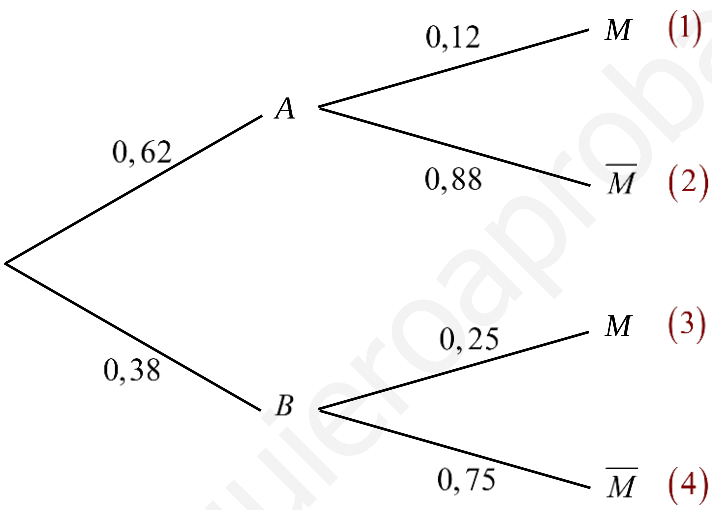
a) $P(L\cup C)=P(L)+P(C)-P(L\cap C)=0,65+0,25-0,1=0,8$.

b) $P(\overline{L}\cap\overline{C})=P(\overline{L\cup C})=1-P(L\cup C)=1-0,8=0,2$.

c) $P(L\cap\overline{C})=P(L-C)=P(L)-P(L\cap C)=0,65-0,1=0,55$.

4. El 62% de los estudiantes de un instituto son chicas y el resto son chicos. Padecen miopía el 12% de las chicas y el 25% de los chicos. Se elige a un estudiante al azar y se observa si padece o no padece miopía.

   a) **[0,5 puntos]** Nombrando a cada suceso de manera adecuada, elabora un diagrama de árbol que describa la totalidad del experimento aleatorio.
   Llamemos $A$ al suceso "ser chica", $B$ al suceso "ser chico" y $M$ al suceso "padecer miopía". El diagrama de árbol que describe la totalidad del experimento es el siguiente:




   b) **[0,5 puntos]** Hallar la probabilidad de que el estudiante sea chica y padezca miopía.

   $P(A\cap M)=(1)=0,62\cdot 012=0,0744$.

   c) **[1 punto]** Hallar la probabilidad de que el estudiante no padezca miopía.

   $P(\overline{M})=P(A\cap\overline{M})+P(B\cap\overline{M})=(2)+(4)=0,62\cdot 0,88+0,38\cdot 0,75=0,8306$.