Matemáticas aplicadas a las CCSS II - 2º de Bachillerato
Segundo Examen de la Tercera Evaluación - 20 de mayo de 2010

1. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$, se pide:
    a) Continuidad y asíntotas. (**1 punto**)
    b) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos. (**1 punto**)
    c) Representación gráfica. (**1 punto**)

2. En el año 2000 se creó una asociación ecologista. El número de asociados varía con los años de acuerdo con la fórmula
$$N(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 124,$$
donde t es el tiempo en años transcurridos desde su creación y $N(t)$ el número de socios al cabo de t años. Determina:
    a) ¿Cuántos fueron los socios fundadores? (**0,5 puntos**)
    b) En qué año se alcanzó el mínimo de socios. (**0,5 puntos**)

3. Un turista que realiza un crucero tiene un 50 % de probabilidad de visitar Cádiz, un 40 % de visitar Sevilla y un 30 % de visitar ambas ciudades. Calcula la probabilidad de que:
    a) Visite únicamente una de las dos ciudades. (**1 punto**)
    b) Visite Sevilla, sabiendo que ha visitado Cádiz. (**1 punto**)

4. Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0,01 si la bombilla es blanca, 0,02 si la bombilla es azul e igual a 0,03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.
    a) Calcula la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione. (**1 punto**)
    b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcula la probabilidad de que dicha bombilla sea azul. (**1 punto**)

5. Hace 4 años el gasto medio en material escolar de un niño de primaria al comienzo del curso era de 214 euros. Este año, para 60 niños, se obtuvo un gasto medio de 225 euros con una desviación típica de 20 euros.
    a) Obtener un intervalo de confianza para el gasto medio con una confianza del 97 %. (**1 punto**)
    b) Interpreta el significado del intervalo obtenido y explica si se puede admitir el gasto medio de hace 4 años como gasto adecuado para el presupuesto de este año. (**1 punto**)

www.yoquieroaprobar.es

Soluciones

1. Observemos en primer lugar que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ y que los puntos de corte con los ejes son: $(0,\ 0)$ y $(3/2,\ 0)$.

   a) Por un lado tenemos que: $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^2-3x}{2-x} = \dfrac{2}{0} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad x \to 2^- \\ -\infty & \text{si} \quad x \to 2^+ \end{cases}$ $\Rightarrow f$ no es continua en $x = 2$. En este punto hay una discontinuidad de salto infinito Además, $x = 2$ es una asíntota vertical.

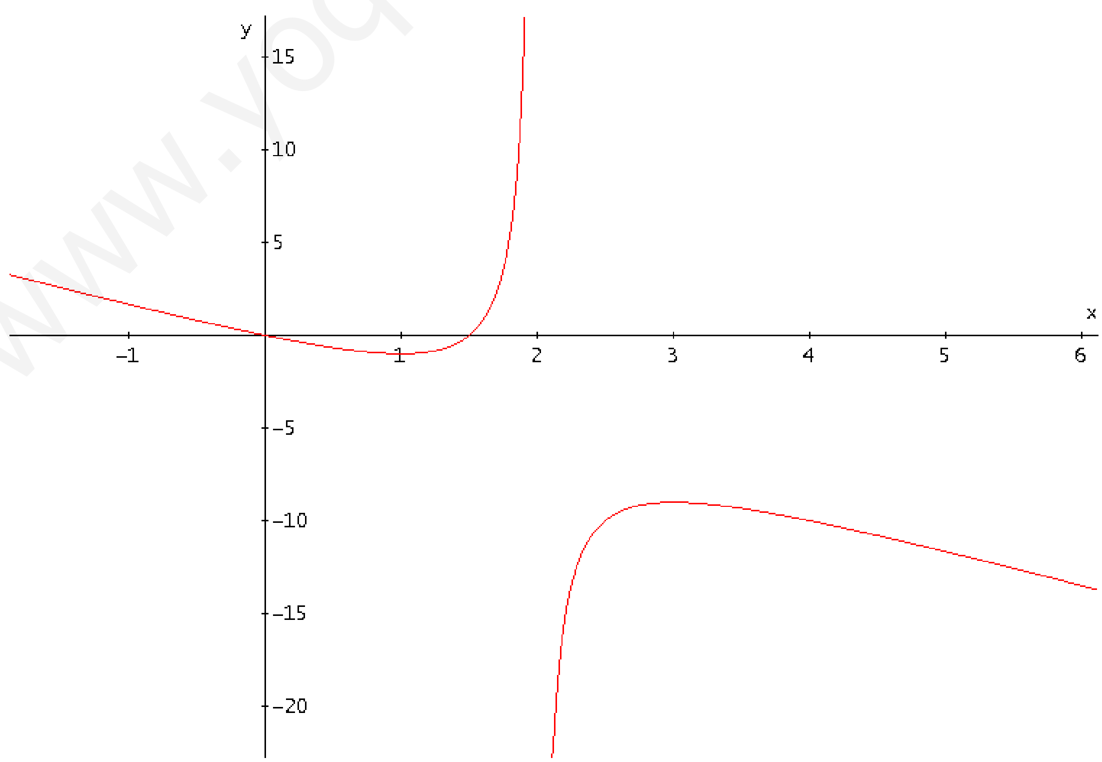
   Por otro lado: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x}{2-x} = \infty = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad x \to +\infty \\ +\infty & \text{si} \quad x \to -\infty \end{cases}$ $\Rightarrow f$ no tiene asíntotas horizontales.

   b) $f'(x) = \dfrac{(4x-3)(2-x)-(2x^2-3x)(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{-2x^2+8x-6}{(2-x)^2}$. Entonces $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ $-2x^2+8x-6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$. De este modo podemos confeccionar la siguiente tabla:

	$(-\infty,\ 1)$	$(1,\ 2)$	$(2,\ 3)$	$(3,\ +\infty)$
signo de f'	$-$	$+$	$+$	$-$

   Por tanto f es estrictamente creciente en $(1,\ 2) \cup (2,\ 3)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty,\ 1) \cup (3,\ +\infty)$. Además tiene un mínimo relativo en $x = 1$ y un máximo relativo en $x = 3$. Concretamente el mínimo es el punto $(1, -1)$ y el máximo es el punto $(3, -9)$.

   c) Utilizando los apartados anteriores, la representación gráfica de la función queda como sigue:



www.yoquieroaprobar.es

2. El número de socios fundadores viene dado por el número de socios que había justo al crearse la asociación, es decir, en el año 2000, que viene a ser el año cero: $N(0) = 124$. Por tanto el número de socios fundadores era de 124.
   Estudiemos la monotonía de la función: $N'(t) = 6t^2 - 30t + 24$. Entonces $N'(t) = 0 \Leftrightarrow$ $6t^2 - 30t + 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{cases}$. Entonces:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, +\infty)$
signo de N'	$+$	$-$	$+$

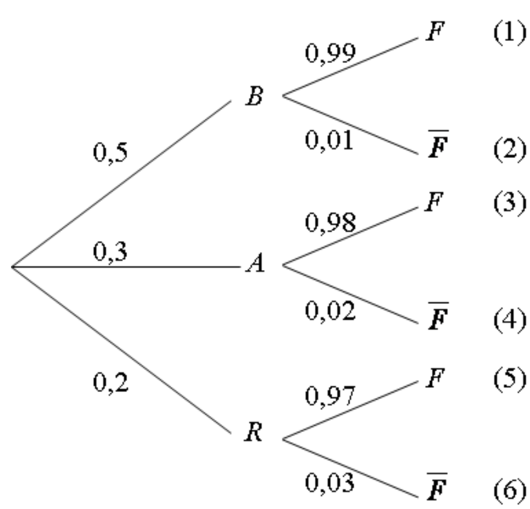
   Según la tabla anterior el mínimo se encuentra en $t = 4$ pues en este punto la función pasa de ser decreciente a ser creciente. Así pues el mínimo de socios se alcanzó en el año 4, es decir, en 2004.

3. Sean los sucesos C "visitar Cádiz" y S "visitar Sevilla". Entonces, según el enunciado, $P(C) = 0{,}5$; $P(S) = 0{,}4$ y $P(C \cap S) = 0{,}3$.

   a) Que visite únicamente una de las dos ciudades es el suceso visitar Cádiz y no Sevilla, o bien visitar Sevilla y no Cádiz. Entonces:
   $P(\text{"visitar Cádiz y no Sevilla"}) = P(C \cap \overline{S}) = P(C) - P(C \cap S) = 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2.$
   $P(\text{"visitar Sevilla y no Cádiz"}) = P(S \cap \overline{C}) = P(S) - P(S \cap C) = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1.$
   Por tanto:
   $P(\text{"visitar únicamente una de las dos ciudades"}) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3.$

   b) $P(S/C) = \dfrac{P(S \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6.$

4. Sean los sucesos B: "extraer bombilla blanca", A: "extraer bombilla azul" y R: "extraer bombilla roja". Entonces $P(B) = \dfrac{200}{400} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, $P(A) = \dfrac{120}{400} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$ y $P(R) = \dfrac{80}{400} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$. Llamemos también F al suceso "que una bombilla funcione". Ahora podemos construir el siguiente diagrama, el cual describe el experimento:



www.yoquieroaprobar.es

a) Observando el diagrama se tiene que:
$P(\overline{F}) = P(B \cap \overline{F}) + P(A \cap \overline{F}) + P(R \cap \overline{F}) = (2) + (4) + (6) = 0{,}5 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}017$

b) $P(A/\overline{F}) = \dfrac{P(A \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}02}{0{,}017} = 0{,}35$

5. Con una confianza del 97 % se tiene que $1 - \alpha = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 0{,}03 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}015 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985$. Por tanto, mirando en la tabla de la distribución normal $N(0,\ 1)$ se tiene que $z_{\alpha/2} = 2{,}17$

   a) El intervalo de confianza es:
$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(225 - 2{,}17\frac{20}{\sqrt{60}},\ 225 + 2{,}17\frac{20}{\sqrt{60}}\right) = (219,4,\ 230,6)$$

   b) El intervalo nos dice que la probabilidad de que la media poblacional μ se encuentre entre 219, 4 y 230,6 es 0,97; o lo que es lo mismo, en el 97 % de las ocasiones la media poblacional μ estará entre 219, 4 y 230,6.
   Como 214, que es el gasto medio de hace 4 años, no pertenece al intervalo, debemos concluir que no se puede admitir este valor como gasto adecuado para el presupuesto de este año: un presupuesto adecuado debería de encontrarse dentro del intervalo de confianza.

www.yoquieroaprobar.es