

1. De los alumnos de la modalidad de Ciencias e Ingeniería de un instituto, el 25% ha suspendido la Física, el 15% las Matemáticas y el 10% ambas asignaturas.
 - a) [0,5 puntos] Calcular la probabilidad de que un alumno haya suspendido una de las dos asignaturas por lo menos.
 - b) [0,5 puntos] Encontrar la probabilidad de que haya aprobado ambas asignaturas.
 - c) [0,5 puntos] Calcular la probabilidad de que sólo haya aprobado las Matemáticas.
 - d) [0,5 puntos] Si ha suspendido la Física, ¿cuál es la probabilidad de que haya suspendido también las Matemáticas?
 - e) [0,5 puntos] Si ha aprobado las Matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado la Física?
2. Un taller tiene distribuidos los coches en tres naves: N_1 , N_2 y N_3 . En la nave N_1 hay 12 coches, de los cuales 4 están averiados; en la nave N_2 hay 1 coche averiado y otros 5 que no están averiados, y en la nave N_3 hay 8 coches, de los cuales hay 3 averiados. Se elige una nave al azar y se saca un coche.
 - a) [0,5 puntos] Realiza un diagrama de árbol donde se aprecie el experimento señalado con los posibles sucesos y sus probabilidades.
 - b) [1 punto] Hallar la probabilidad de que el coche que se ha sacado esté averiado.
 - c) [1 punto] Supongamos que el coche que se ha sacado no está averiado. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la nave N_3 ?
3. Para aprobar cierta oposición del ministerio de las administraciones públicas se necesita obtener un mínimo de 100 puntos. Para obtener una plaza fija en tal ministerio se necesitan como mínimo 125 puntos. Se sabe que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal de media 110 y desviación típica 15.
 - a) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad tiene un opositor elegido al azar de haber aprobado?
 - b) [0,5 puntos] ¿Y de obtener una plaza fija?
 - c) [0,5 puntos] ¿Y de aprobar, pero no de obtener plaza fija?
 - d) [0,5 puntos] ¿Qué porcentaje de opositores obtienen menos de 90 puntos?
 - e) [0,5 puntos] Si sabemos que hay 1000 opositores y sólo 300 plazas, ¿qué puntuación mínima debería exigirse para ajustar el número de aprobados al de plazas existentes?
4. La dirección de un centro de secundaria ha establecido que la media de horas semanales dedicadas al estudio es 15 o más, con una desviación típica igual a 1 hora. Durante el presente curso, el Departamento de Matemáticas quiere demostrar que esta media ha disminuido. Para ello, elige una muestra aleatoria de 150 alumnos, obteniendo una media muestral de 12,7 horas.
 - a) [1 punto] Halla un intervalo, al 92% de confianza, para la media de horas semanales dedicadas al estudio.
 - b) [0,5 puntos] ¿Puede afirmarse, con el mismo nivel de confianza anterior, que ha disminuido el tiempo medio dedicado al estudio por los alumnos del centro? Razona la respuesta.
 - c) [1 punto] Si aceptamos un error de un cuarto de hora con una confianza del 98%, ¿a cuántos estudiantes es necesario entrevistar?

Soluciones

1. De los alumnos de la modalidad de Ciencias e Ingeniería de un instituto, el 25% ha suspendido la Física, el 15% las Matemáticas y el 10% ambas asignaturas.

Llamemos F al suceso "suspender Física" y M al suceso "suspender Matemáticas". Entonces, según el enunciado, se tiene que $P(F) = 0,25$, $P(M) = 0,15$ y $P(F \cap M) = 0,1$.

- a) [0,5 puntos] Calcular la probabilidad de que un alumno haya suspendido una de las dos asignaturas por lo menos.

$$P(F \cup M) = P(F) + P(M) - P(F \cap M) = 0,25 + 0,15 - 0,1 = 0,3.$$

- b) [0,5 puntos] Encontrar la probabilidad de que haya aprobado ambas asignaturas.

$$P(\overline{M} \cap \overline{F}) = P(\overline{M \cup F}) = 1 - P(M \cup F) = 1 - 0,3 = 0,7.$$

- c) [0,5 puntos] Calcular la probabilidad de que sólo haya aprobado las Matemáticas.

$$P(F - M) = P(F \cap \overline{M}) = P(F) - P(F \cap M) = 0,25 - 0,1 = 0,15$$

- d) [0,5 puntos] Si ha suspendido la Física, ¿cuál es la probabilidad de que haya suspendido también las Matemáticas?

$$P(M / F) = \frac{P(M \cap F)}{P(F)} = \frac{0,1}{0,25} = 0,4.$$

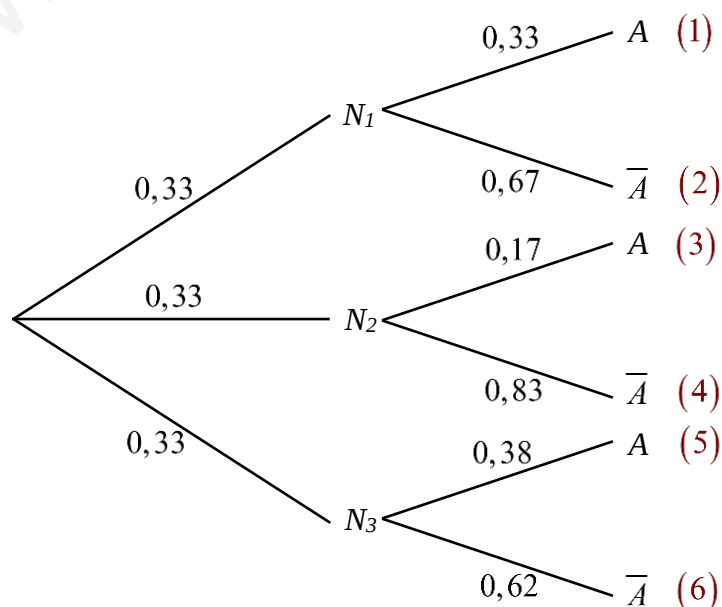
- e) [0,5 puntos] Si ha aprobado las Matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado la Física?

$$P(\overline{F} / \overline{M}) = \frac{P(\overline{F} \cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{0,7}{0,85} = 0,82.$$

2. Un taller tiene distribuidos los coches en tres naves: N_1 , N_2 y N_3 . En la nave N_1 hay 12 coches, de los cuales 4 están averiados; en la nave N_2 hay 1 coche averiado y otros 5 que no están averiados, y en la nave N_3 hay 8 coches, de los cuales hay 3 averiados. Se elige una nave al azar y se saca un coche.

Llamemos A al suceso "coche averiado".

- a) [0,5 puntos] Realiza un diagrama de árbol donde se aprecie el experimento señalado con los posibles sucesos y sus probabilidades.



b) [1 punto] Hallar la probabilidad de que el coche que se ha sacado esté averiado.

$$P(A) = P(A/N_1) + P(A/N_2) + P(A/N_3) = (1) + (3) + (5) = \\ = 0,33 \cdot 0,33 + 0,33 \cdot 0,17 + 0,33 \cdot 0,38 = 0,1089 + 0,0561 + 0,1254.$$

c) [1 punto] Supongamos que el coche que se ha sacado no está averiado. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la nave N_3 ?

$$P(N_3/\bar{A}) = \frac{P(N_3 \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{(6)}{1 - P(A)} = \frac{0,33 \cdot 0,62}{1 - 0,2904} = \frac{0,2046}{0,7096} = 0,2883.$$

3. Para aprobar cierta oposición del ministerio de las administraciones públicas se necesita obtener un mínimo de 100 puntos. Para obtener una plaza fija en tal ministerio se necesitan como mínimo 125 puntos. Se sabe que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal de media 110 y desviación típica 15.

Llamemos X a la variable "puntuaciones obtenidas". Entonces $X \rightarrow N(110, 15)$.

a) [0,5 puntos] ¿Qué probabilidad tiene un opositor elegido al azar de haber aprobado?

$$P(X \geq 100) = P\left(Z \geq \frac{100 - 110}{15}\right) = P(Z \geq -0,67) = P(Z \leq 0,67) = 0,7486.$$

b) [0,5 puntos] ¿Y de obtener una plaza fija?

$$P(X \geq 125) = P\left(Z \geq \frac{125 - 110}{15}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

c) [0,5 puntos] ¿Y de aprobar, pero no de obtener plaza fija?

$$P(100 \leq X \leq 125) = P(X \leq 125) - P(X \leq 100) = P\left(Z \leq \frac{125 - 110}{15}\right) - P\left(Z \leq \frac{100 - 110}{15}\right) = \\ = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0,67) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 0,67)) = \\ = 0,8413 - (1 - 0,7486) = 0,8413 - 0,2514 = 0,5899.$$

d) [0,5 puntos] ¿Qué porcentaje de opositores obtienen menos de 90 puntos?

$$P(X < 90) = P\left(Z < \frac{90 - 110}{15}\right) = P(Z < -1,33) = 1 - P(Z < 1,33) = 1 - 0,9082 = 0,0918. \text{ Por tanto, el } \\ \text{porcentaje de opositores que obtienen menos de 90 puntos es del 9,18 \%}$$

e) [0,5 puntos] Si sabemos que hay 1000 opositores y sólo 300 plazas, ¿qué puntuación mínima debería exigirse para ajustar el número de aprobados al de plazas existentes?

Llamemos x a la puntuación mínima. Entonces la probabilidad de estar por encima de esta puntuación debe estimarse en $300/1000 = 0,3$. De este modo:

$$P(X \geq x) = 0,3 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{x - 110}{15}\right) = 0,3 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x - 110}{15}\right) = 0,7 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x - 110}{15} = 0,52 \Rightarrow x = 0,52 \cdot 15 + 110 \Rightarrow x = 117,8.$$

O sea, que la puntuación mínima que debería exigirse para ajustar el número de aprobados al de plazas existentes es de 117,8 (esto se conoce habitualmente como nota de corte).

4. La dirección de un centro de secundaria ha establecido que la media de horas semanales dedicadas al estudio es 15 o más, con una desviación típica igual a 1 hora. Durante el presente curso, el Departamento de Matemáticas quiere demostrar que esta media ha disminuido. Para ello, elige una muestra aleatoria de 150 alumnos, obteniendo una media muestral de 12,7 horas.

Se tiene que $\mu = 15$, $n = 150$, $\bar{x} = 12,7$ y $\sigma = 1$.

- a) [1 punto] Halla un intervalo, al 92% de confianza, para la media de horas semanales dedicadas al estudio.

$1 - \alpha = 0,92 \Rightarrow \alpha = 0,08 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,04 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,96 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,75$. El intervalo de confianza al 92 % es:

$$\left(12,7 - 1,75 \cdot \frac{1}{\sqrt{150}}, 12,7 + 1,75 \cdot \frac{1}{\sqrt{150}} \right) = (12,557 ; 12,843).$$

- b) [0,5 puntos] ¿Puede afirmarse, con el mismo nivel de confianza anterior, que ha disminuido el tiempo medio dedicado al estudio por los alumnos del centro? Razona la respuesta.

Sí que ha disminuido el tiempo medio dedicado al estudio ya que $15 \notin (12,557 ; 12,843)$.

- c) [1 punto] Si aceptamos un error de un cuarto de hora con una confianza del 98%, ¿a cuántos estudiantes es necesario entrevistar.

$E = 0,25$. Al 98 % es $z_{\alpha/2} = 2,33$ (¡compruébes!). Entonces:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{E} \right)^2 \Rightarrow n = \left(2,33 \cdot \frac{1}{0,25} \right)^2 = 86,8624.$$

Por tanto, será necesario entrevistar a 87 estudiantes como mínimo.