1. Si un estudiante responde al azar a un examen de 8 preguntas de verdadero o falso:

a) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que acierte 4?

b) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que acierte dos o menos?

c) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que acierte seis o más?

d) **[0,5 puntos]** ¿Cuánto valen la media y la varianza del número de preguntas acertadas?

e) **[0,5 puntos]** ¿Sería válido contestar a las preguntas anteriores aproximando por una normal? Explica por qué.

2. Un examen se califica entre 0 y 10. Tales calificaciones siguen una distribución Normal de media 5,6 y desviación típica 0,8. Elegido un alumno al azar, hallar la probabilidad de que:

a) **[0,5 puntos]** Obtenga una puntuación igual o inferior a 4.

b) **[0,5 puntos]** Apruebe, es decir, obtenga un 5 o más.

c) **[0,5 puntos]** Obtenga notable o sobresaliente, es decir, un 7 o más.

d) **[0,5 puntos]** Obtenga muy deficiente, es decir, un 2 o menos.

e) **[0,5 puntos]** Supongamos que superan el examen solamente el 10 % de los alumnos. Entonces el aprobado no será a partir exactamente de 5. ¿A partir de qué calificación tendría que aprobar a un alumno?

3. Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador de transporte público. Se toma para ello una muestra de 625 de estos trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 euros. Si la desviación típica es igual a 250 euros.

a) **[1 punto]** Con un nivel de confianza del 90 %, determina el intervalo de confianza para el sueldo medio de un trabajador del transporte público.

b) **[1 punto]** Con el mismo nivel de confianza que en el apartado anterior, ¿cómo procederías para hacer que la amplitud del intervalo de confianza fuera menor y, por tanto, la estimación más fiable?

c) **[1 punto]** Si se quiere que el error máximo de estimación sea de 10 euros, hallar el tamaño de la muestra que se debe tomar considerando un nivel de confianza del 99 %.

4. **[2 puntos]** Se ha obtenido que el intervalo de confianza correspondiente al 95 % de una variable es (6,66 ; 8,34). Calcula la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo sabiendo que la desviación típica es igual a 3.

Soluciones

1. Si un estudiante responde al azar a un examen de 8 preguntas de verdadero o falso:

La variable X "número de respuestas acertadas" sigue una distribución binomial con $n=8$ y $p=0,5$: $X \to B(8;\, 0,5)$.

a) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que acierte 4?

$$P(X=4)=\binom{8}{4}\cdot 0,5^4\cdot 0,5^4=70\cdot 0,0625\cdot 0,0625=0,2734\,.$$

b) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que acierte dos o menos?

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$=\binom{8}{0}\cdot 0,5^0\cdot 0,5^8+\binom{8}{1}\cdot 0,5^1\cdot 0,5^7+\binom{8}{2}\cdot 0,5^2\cdot 0,5^6=0,003906+0,03125+0,109375=0,144531\,.$$

c) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que acierte seis o más?

$$P(X\ge 6)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=$$

$$=\binom{8}{6}\cdot 0,5^6\cdot 0,5^2+\binom{8}{7}\cdot 0,5^7\cdot 0,5^1+\binom{8}{8}\cdot 0,5^8\cdot 0,5^0=0,109375+0,03125+0,003906=0,144531$$

d) [0,5 puntos] ¿Cuánto valen la media y la varianza del número de preguntas acertadas?

Media: $\mu=np=8\cdot 0,5=4$.

Desviación típica: $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{8\cdot 0,5\cdot 0,5}=\sqrt{2}$. Varianza: $\sigma^2=2^2=4$.

e) [0,5 puntos] ¿Sería válido contestar a las preguntas anteriores aproximando por una normal? Explica por qué.

No, porque $np=4$ y $npq=2$, y ninguno de estos dos valores es mayor o igual que 5. Además, tampoco se cumple que $n\ge 30$.

2. Un examen se califica entre 0 y 10. Tales calificaciones siguen una distribución Normal de media 5,6 y desviación típica 0,8. Elegido un alumno al azar, hallar la probabilidad de que:

Sabemos que si X es la variable "calificación", entonces $X \to N(5,6\,;\,0,8)$.

a) [0,5 puntos] Obtenga una puntuación igual o inferior a 4.

$$P(X\le 4)=P\left(Z\le\frac{4-5,6}{0,8}\right)=P(Z\le -2)=P(Z\ge 2)=1-P(Z\le 2)=1-0,9772=0,0228\,.$$

b) [0,5 puntos] Apruebe, es decir, obtenga un 5 o más.

$$P(X\ge 5)=P\left(Z\ge\frac{5-5,6}{0,8}\right)=P(Z\ge -0,75)=P(Z\le 0,75)=0,7734\,.$$

c) [0,5 puntos] Obtenga notable o sobresaliente, es decir, un 7 o más.

$$P(X\ge 7)=P\left(Z\ge\frac{7-5,6}{0,8}\right)=P(Z\ge 1,75)=1-P(Z\le 1,75)=1-0,9599=0,0401\,.$$

d) [0,5 puntos] Obtenga muy deficiente, es decir, un 2 o menos.

$$P(X \leq 2) = P\left(Z \leq \frac{2-5,6}{0,8}\right) = P(Z \leq -4,5) = P(Z \geq 4,5) = 1 - P(Z \leq 4,5) = 1 - 1 = 0$$

e) [0,5 puntos] Supongamos que superan el examen solamente el 10 % de los alumnos. Entonces el aprobado no será a partir exactamente de 5. ¿A partir de qué calificación tendría que aprobar a un alumno?

Llamemos x a la calificación a partir de la cual tendría que aprobar un alumno. Entonces:

$$P(X \geq x) = 0,1 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{x-5,6}{0,8}\right) = 0,1 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{x-5,6}{0,8}\right) = 0,1 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-5,6}{0,8}\right) = 0,9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-5,6}{0,8} = 1,28 \Rightarrow x = 1,28 \cdot 0,8 + 5,6 \Rightarrow x = 6,624.$$

3. Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador de transporte público. Se toma para ello una muestra de 625 de estos trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 euros. Si la desviación típica es igual a 250 euros.

Se tiene que $n = 625$, $\bar{x} = 1480$, $\sigma = 250$.

a) [1 punto] Con un nivel de confianza del 90 %, determina el intervalo de confianza para el sueldo medio de un trabajador del transporte público.

$1 - \alpha = 0,9 \Rightarrow \alpha = 0,1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645$. Por tanto, el intervalo de confianza al 90 % para el sueldo medio de un trabajador del transporte público es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1480 - 1,645 \cdot \frac{250}{\sqrt{625}}, 1480 + 1,645 \cdot \frac{250}{\sqrt{625}}\right) = (1463,55\ ;\ 1496,45).$$

b) [1 punto] Con el mismo nivel de confianza que en el apartado anterior, ¿cómo procederías para hacer que la amplitud del intervalo de confianza fuera menor y, por tanto, la estimación más fiable.

Aumentando el tamaño de la muestra.

c) [1 punto] Si se quiere que el error máximo de estimación sea de 10 euros, hallar el tamaño de la muestra que se debe tomar considerando un nivel de confianza del 99%.

Para $1 - \alpha = 0,99$ es $z_{\alpha/2} = 2,575$. Entonces, como el error $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es igual a 10 euros tenemos que:

$$2,575 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} = 10 \Rightarrow \sqrt{n} = 2,575 \cdot \frac{250}{10} \Rightarrow \sqrt{n} = 64,375 \Rightarrow n = 4144,14.$$

Por tanto, el tamaño de la muestra debe ser de, al menos, 4145 trabajadores.

4. [2 puntos] Se ha obtenido que el intervalo de confianza correspondiente al 95 % de una variable es (6,66 ; 8,34). Calcula la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo sabiendo que la desviación típica es igual a 3.

Sabemos que si $1 - \alpha = 0,95$, entonces $z_{\alpha/2} = 1,96$. Como el intervalo de confianza es $(6,66\ ;\ 8,34)$, la media muestral $\bar{x}$ está situada justo en la mitad, es decir $\bar{x} = \frac{6,66 + 8,34}{2} \Rightarrow \bar{x} = 7,5$.

Por tanto, el error máximo cometido es $E = 7,5 - 6,66 = 0,84$. Entonces:

$$1,96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 0,84 \Rightarrow \sqrt{n} = 1,96 \cdot \frac{3}{0,84} \Rightarrow \sqrt{n} = 7 \Rightarrow n = 49.$$

Es decir, el tamaño de la muestra es exactamente igual a 49.