

EJERCICIO 1

Dada la función $f(x) = \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x}$, se pide:

- Calcula las asíntotas verticales y oblicuas de $f(x)$.
- Coordenadas de los máximos y los mínimos relativos de $f(x)$.

Solución

- a) Como la función es racional y el denominador se anula cuando $x=0$, estudiaremos el límite de la función cuando x tiende a cero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x} = \left[\frac{4}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 0^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 0^+ \end{cases} \Rightarrow x=0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Veamos si hay alguna asíntota oblicua de la forma $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^2 + 3x + 4}{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x + 4}{2x^2} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 3x + 4}{2x} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 4}{2x} = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la asíntota oblicua de la función es $y = 2x + \frac{3}{2}$.

- b) La derivada de f es $f'(x) = \frac{(8x+3) \cdot 2x - (4x^2 + 3x + 4) \cdot 2}{(2x)^2} = \frac{8x^2 - 8}{4x^2} = \frac{2x^2 - 2}{x^2}$.

Igualemos la derivada a cero y extraigamos las soluciones.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Estos son los puntos singulares o críticos, “candidatos” a máximos o mínimos relativos. Haremos la derivada segunda de la función y evaluaremos los puntos singulares en la misma.

$$f''(x) = \frac{4x \cdot x^2 - (2x^2 - 2) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{4x}{x^4} = \frac{4}{x^3}$$

Entonces:

- $f''(-1) = \frac{4}{(-1)^3} = -4 < 0 \Rightarrow x = -1$ es un máximo relativo.

$$\text{Como } f(-1) = \frac{4(-1)^2 + 3(-1) + 4}{2(-1)} = \frac{4 - 3 + 4}{-2} = -\frac{5}{2}, \text{ las coordenadas del máximo son } \left(-1, -\frac{5}{2}\right).$$

- $f''(1) = \frac{4}{1^3} = 4 > 0 \Rightarrow x = 1$ es un mínimo relativo.

$$\text{Como } f(1) = \frac{4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 4}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 3 + 4}{2} = \frac{11}{2}, \text{ las coordenadas del mínimo son } \left(1, \frac{11}{2}\right).$$

EJERCICIO 2

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int (\cos(2x) + \sen x \cos x) dx.$

b) $\int \frac{x^3 - 1}{x + 2} dx.$

Solución

a)
$$\int (\cos(2x) + \sen x \cos x) dx = \int \cos(2x) dx + \int \sen x \cos x dx = \frac{1}{2} \int 2 \cos(2x) dx + \frac{1}{2} \int 2 \sen x \cos x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sen(2x) + \frac{1}{2} \sen^2 x + C.$$

b) Realizando la división $(x^3 - 1) : (x + 2)$ se obtiene de cociente $x^2 - 2x + 4$ y de resto -9 . Entonces:

$$x^3 - 1 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 9 \Rightarrow \frac{x^3 - 1}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 9}{x + 2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{9}{x + 2}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3 - 1}{x + 2} dx = \int \left(x^2 - 2x + 4 - \frac{9}{x + 2} \right) dx = \int (x^2 - 2x + 4) dx - \int \frac{9}{x + 2} dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 9 \ln|x + 2| + C.$$

EJERCICIO 3

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}.$

b) Encuentra una fórmula general para B^n , donde $n \in \mathbb{N}$. (Indicación: Calcula las primeras potencias de la matriz B).

Solución

a) Si en el sistema $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$ multiplicamos la segunda ecuación por -2 , se tiene $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -2X - 2Y = -2B \end{cases}.$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene que:

$$Y = A - 2B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

De la segunda ecuación del sistema $X + Y = B$ se deduce que $X = B - Y$. Sustituyendo tenemos:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$$B^3 = B^2 \cdot B = I \cdot B = B$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = B \cdot B = I$$

$$B^5 = B^4 \cdot B = I \cdot B = B$$

Así podríamos seguir. Obsérvese que cuando el exponente es par el resultado es la matriz identidad I . Sin embargo, si el exponente es impar el resultado es la matriz B . La fórmula general sería pues:

$$B^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ es par} \\ B & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

EJERCICIO 4

Consideremos el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 - at, t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$.

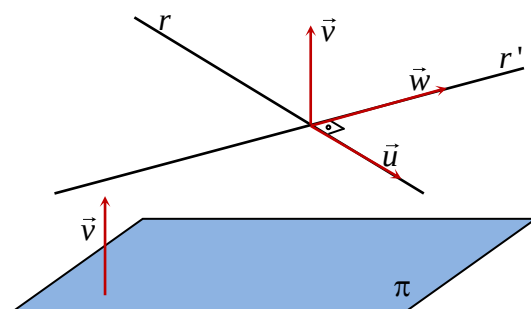
- Determina el parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la recta r y el plano π sean paralelos.
- Para el valor de a determinado, obtén las ecuaciones de una recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto $P(1,1,0)$.

Solución

- La recta r está dada en ecuaciones paramétricas. Un vector director suyo es $\vec{u} = (a, -a, 2)$. Un vector perpendicular al plano π es $\vec{v} = (1, 0, -1)$. Como r y π han de ser paralelos, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ serán perpendiculares, con lo que su producto escalar ha de ser cero: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (a, -a, 2) \cdot (1, 0, -1) = 0 \Leftrightarrow a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.
- Efectivamente $P(1,1,0) \in r$. Basta observar las ecuaciones paramétricas de r para darse cuenta de ello. El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector que tiene dirección perpendicular a ambos. En particular, tendrá dirección paralela al plano (pues $\vec{v}$ es perpendicular a π) y perpendicular a r . Es un vector director de la recta r' que se pide. Llamando $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (i, j, k)$ al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2i + 2j) - (-2k - 2j) = \\ &= 2i + 4j + 2k \Rightarrow \vec{w} = (2, 4, 2). \end{aligned}$$

$$\text{Así pues, la ecuación de la recta } r' \text{ será: } r' \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 4t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$



EJERCICIO 1

En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido $C(t)$, medida en litros, está determinada en función del tiempo t , medido en horas, por la expresión:

$$C(t) = \frac{2}{3} + 10t + \frac{10}{t} + \frac{240}{t^3}, \quad t \in [1, 10]$$

Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre $t = 1$ hora y $t = 10$ horas.

Solución

La función $C(t)$ se puede expresar así: $C(t) = \frac{2}{3} + 10t + 10t^{-1} + 240t^{-3}$. De esta forma se puede derivar con facilidad:

$$C'(t) = 10 + 10(-1)t^{-2} + 240(-3)t^{-4} = 10 - 10t^{-2} - 720t^{-4} = 10 - \frac{10}{t^2} - \frac{720}{t^4}.$$

La segunda derivada es:

$$C''(t) = -10(-2)t^{-3} - 720(-4)t^{-5} = \frac{20}{t^3} + \frac{2880}{t^5}.$$

Resolviendo la ecuación $C'(t) = 0$ obtenemos aquellos puntos singulares o críticos que pueden ser máximos o mínimos relativos de la función:

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow 10 - \frac{10}{t^2} - \frac{720}{t^4} = 0 \Leftrightarrow 10t^4 - 10t^2 - 720 = 0 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0.$$

$$\text{Resolviendo la ecuación: } t^2 = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-72)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2} = \begin{cases} \frac{18}{2} = 9 \\ -\frac{16}{2} = -8 \end{cases}.$$

Si $t^2 = -8$, no existe solución real para t . Si $t^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -3 \\ t_2 = 3 \end{cases}$. De estos dos valores, el único candidato a máximo o

mínimo es $t_2 = 3$, pues es el que se encuentra en el intervalo comprendido entre $t = 1$ hora y $t = 10$ horas.

Sustituyendo en la segunda derivada se tiene que $C''(t_2) = C''(3) = \frac{20}{3^3} + \frac{2880}{3^5} > 0 \Rightarrow t_2 = 3$ es un mínimo.

Así pues, la cantidad mínima de agua en estado líquido se da en el instante $t = 3$ horas. Dicha cantidad mínima será:

$$C(3) = \frac{2}{3} + 10 \cdot 3 + \frac{10}{3} + \frac{240}{3^3} = \frac{2}{3} + 30 + \frac{10}{3} + \frac{240}{27} = 34 + \frac{240}{27} = \frac{918 + 240}{27} = \frac{1158}{27} = \frac{386}{9} \approx 44,89 \text{ litros.}$$

EJERCICIO 2

a) Representa gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y

$$g(x) = \frac{1}{x^2}, \text{ y la recta } x = 2.$$

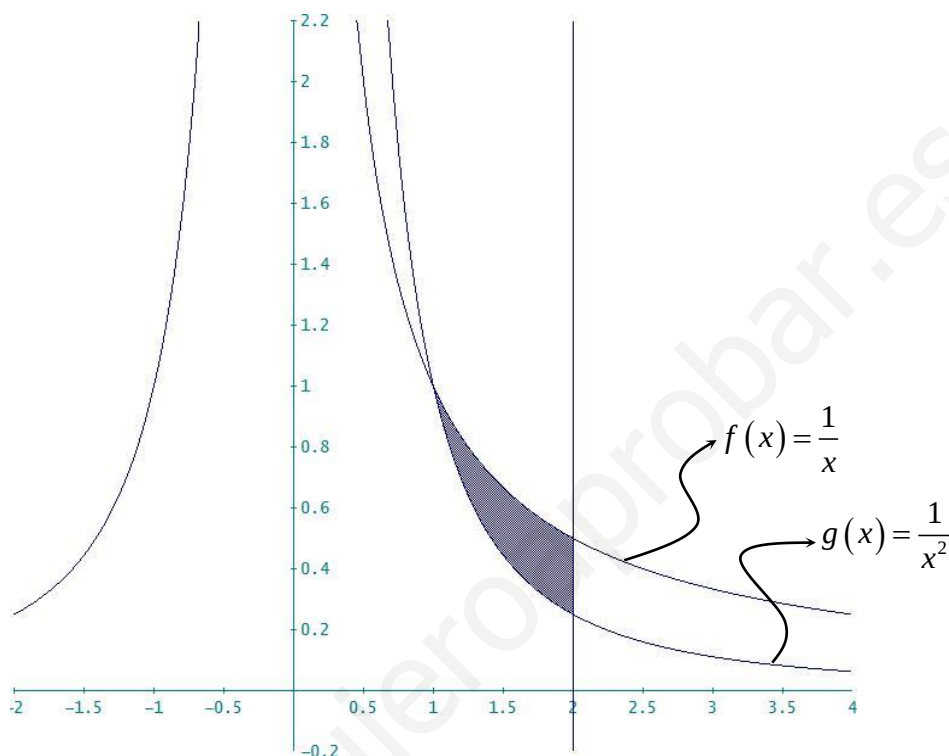
b) Calcula el área de dicha región.

Solución

a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$. Entonces las funciones $f(x)$ y

$g(x)$ se cortan en el punto $x=1$ (el punto $x=0$ no pertenece al dominio de ninguna de las dos funciones).

Gráficamente:



b) El área de la región sombreada es $\int_1^2 (f(x) - g(x)) dx$:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\ln x + \frac{1}{x} \right]_1^2 = \left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right) - (\ln 1 + 1) = \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 0,19 \text{ uds}^2$$

EJERCICIO 3

a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + 2y - z = \lambda \\ 3x - y - z = 1 \\ 5x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 2$.

Solución

a) Sea A la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos 2, pues contiene un menor de

orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-5) = -8$.

El determinante de A es $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2\lambda - 10 - 3) - (5 - 12 - \lambda) = 3\lambda - 6$. Obsérvese pues que

$|A| = 0 \Leftrightarrow 3\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$. Por tanto:

- Si $\lambda \neq 2 \Rightarrow \text{rango}(A) = 3$.
- Si $\lambda = 2 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$.

Estudiemos ahora el rango de la matriz ampliada $B = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 & \lambda \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

- Si $\lambda \neq 2 \Rightarrow \text{rango}(B) = 3$, pues en este caso el rango de A ya era 3.
- Si $\lambda = 2$, $\text{rango}(B) = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = 2$, pues todos los menores de orden 3 deben ser igual a cero (obsérvese que la tercera fila es la suma de la primera y la segunda).

Resumiendo:

- Si $\lambda \neq 2 \Rightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 3 = n$ (número de incógnitas). Entonces el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $\lambda = 2 \Rightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 2 < 3 = n$. En este caso el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Ya hemos visto que para $\lambda = 2$ hay infinitas soluciones pues $\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 2 < 3 = n$. El grado de libertad del sistema, en este caso, es igual a 1. Llamando $z = t$ y eliminando la tercera ecuación tenemos el sistema equivalente $\begin{cases} 2x + 2y = 2 + t \\ 3x - y = 1 + t \end{cases}$, cuyas soluciones son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2+t & 2 \\ 1+t & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(-2-t) - (2+2t)}{-2-6} = \frac{-4-3t}{-8} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}t.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2+t \\ 3 & 1+t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(2+2t) - (6+3t)}{-2-6} = \frac{-4-t}{-8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}t.$$

Por tanto, las soluciones del sistema son $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}t, \frac{1}{2} + \frac{1}{8}t, t \right)$, $t \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 4

Dados los puntos de coordenadas $A(0,1,0)$, $B(1,2,3)$, $C(0,2,1)$ y $D(k,1,1)$, donde $k \in \mathbb{R}$:

- Determina el área del triángulo de vértices A , B y C .
- ¿Para qué valores del parámetro k el tetraedro cuyos vértices son A , B , C y D tienen un volumen de 5 u^3 ?

Solución

Área de un triángulo:

Sean tres puntos del espacio $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$. Llamemos S al área del triángulo cuyos

vértices son A , B y C , y $\vec{u}$ al vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}$. Entonces:

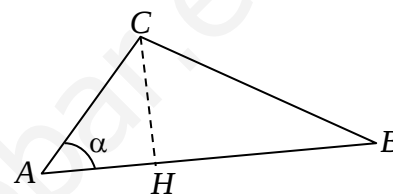
$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

Demostración.

El área del triángulo ABC es:

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \quad (\text{la}$$

última igualdad es la definición de módulo del producto vectorial de dos vectores).



a) Por el resultado anterior, llamando S al área del triángulo de vértices A , B y C :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-0 & 2-1 & 3-0 \\ 0-0 & 2-1 & 1-0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| (\vec{i} + \vec{k}) - (\vec{j} + 3\vec{i}) \right\| = \frac{1}{2} \left\| -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \right\| = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4+1+1} = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,225 \text{ uds}^2 \end{aligned}$$

b) Recordemos que el volumen V de un tetraedro de vértices $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ y $D(d_1, d_2, d_3)$ es igual a la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, es decir:

$$V = \frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix} \right\|$$

Como

$$\frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} 1-0 & 2-1 & 3-0 \\ 0-0 & 2-1 & 1-0 \\ k-0 & 1-1 & 1-0 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6} |(1+k) - (3k)| = \frac{1}{6} |1-2k|,$$

se tiene que:

$$\frac{1}{6} |1-2k| = 5 \Leftrightarrow |1-2k| = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2k = 30 \Rightarrow 2k = -29 \Rightarrow k = -\frac{29}{2} \\ 1-2k = -30 \Rightarrow 2k = 31 \Rightarrow k = \frac{31}{2} \end{cases}$$