

EJERCICIO 1

- a) Enuncia el teorema de Bolzano.
- b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo?
- c) Demuestra que la función $f(x)$ anterior y $g(x) = 2x - 1$ se cortan en al menos un punto.

Solución

- a) Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y $\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)$, entonces existe un número real c perteneciente al intervalo (a, b) tal que $f(c) = 0$.
- b) Como $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $1+x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, con lo que $\frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Esto quiere decir que $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, y entonces nunca existirán números $a, b \in \mathbb{R}$ que cumplan que $\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)$. Por tanto, no se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en ningún intervalo.
- c) Sea $h(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{1+x^2} - (2x-1)$. Esta función está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. Además $h(0) = 2$ y $h(1) = -\frac{1}{2}$, es decir $\text{signo } h(0) \neq \text{signo } h(1)$. Aplicando el teorema de Bolzano, existe un número real $c \in (0, 1)$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) - g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c)$, con lo que $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el punto $c \in (0, 1)$.

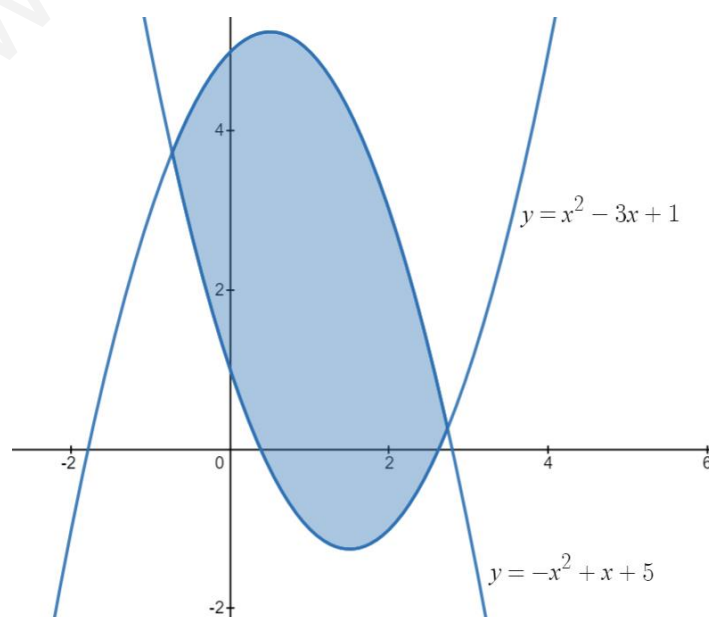
EJERCICIO 2

Calcula las siguientes integrales:

- a) Representa gráficamente las parábolas $f(x) = x^2 - 3x - 1$ y $g(x) = -x^2 + x + 5$.
- b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas.

Solución

a)



b) Calculemos los puntos de corte de las dos parábolas:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = -x^2 + x + 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Entonces el área del recinto limitado por ambas gráficas es:

$$\int_{-1}^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-1}^3 ((-x^2 + x + 5) - (x^2 - 3x - 1)) dx = \int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 6) dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-1}^3 = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x \right]_{-1}^3 = (-18 + 18 + 18) - \left(\frac{2}{3} + 2 - 6 \right) = 18 - \left(-\frac{10}{3} \right) = \frac{64}{3} \text{ uds}^2$$

EJERCICIO 3

a) Clasifica en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para $k = 1$.

Solución

a) Sea A la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$. Calculemos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k^3 + 1 + 1) - (k + k + k) = k^3 - 3k + 2. \text{ Factorizando el polinomio } k^3 - 3k + 2, \text{ se tiene}$$

$$|A| = k^3 - 3k + 2 = (k + 2)(k - 1)^2. \text{ Por tanto } |A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = 1 \end{cases}, \text{ y de aquí:}$$

- Si $k \neq -2$ y $k \neq 1$, $|A| \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 3$.

- Si $k = 2$, el rango no es 3 pues $|A| = 0$. En este caso, la matriz A queda de la forma $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y

rango $A = 2$, pues hay al menos un menor de orden 2 distinto de cero $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$.

- Si $k = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y entonces rango $A = 1$ pues claramente todos los menores de orden 2 son cero (las tres filas son iguales).

La matriz ampliada es $B = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{pmatrix}$. Entonces

- Si $k \neq -2$ y $k \neq 1$, $\text{rango } A = \text{rango } B = 3 = n$ (número de incógnitas). Entonces el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $k = 2$, la matriz ampliada B tiene rango 3, pues existe un menor de orden 3 distinto de cero (por ejemplo, el formado por las columnas primera, segunda y cuarta):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (8+2+2) - (4+2+4) = 12-10 = 2.$$

Entonces, si $k = 2$, $\text{rango } A = 2 \neq 3 = \text{rango } B$ y el sistema es incompatible (no tiene soluciones).

- Si $k = 1$, claramente $\text{rango } A = \text{rango } B = 1 < 3 = n$ (número de incógnitas), y el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Su grado de libertad es $g = n - r = 3 - 2 = 1$.

b) Para $k = 1$ el sistema se reduce a una ecuación: $x + y + z = 1$. Según el apartado anterior, este sistema tiene

dos grados de libertad. Llamando $y = \lambda$, $z = \mu$, las infinitas soluciones se pueden escribir así:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$$

EJERCICIO 4

- a) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$
- b) Encuentra la ecuación general de un plano π' perpendicular a π que contenga a r .

Solución

a) Un vector director de la recta es $\vec{u} = (-1, 0, 1)$ y un vector normal (perpendicular) del plano es $\vec{v} = (2, -1, 3)$. Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 0, 1) \cdot (2, -1, 3) = -2 + 0 + 3 = 1 \neq 0$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son perpendiculares, es decir, r y π no son paralelos y, por tanto, la recta r y el plano π han de ser secantes (se cortarán en un punto).

b) Para determinar π' nos hacen falta dos vectores directores y un punto. Como π' ha de contener a r , cualquier punto de r estará en π' . Tomemos pues $P(0, 0, 1)$ como punto de π' .

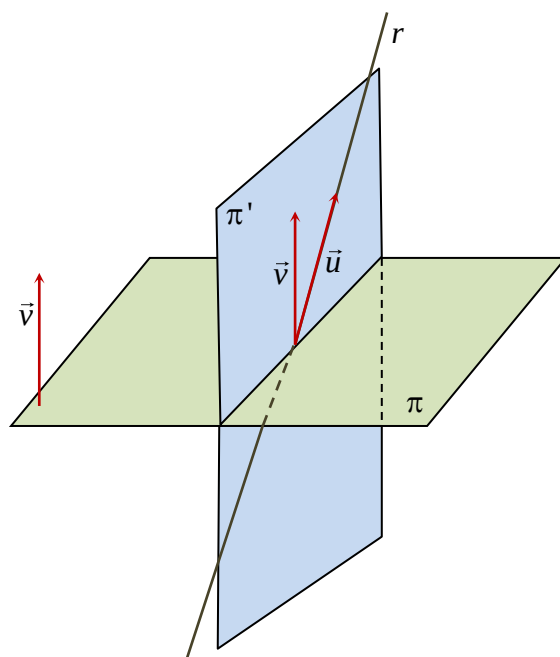
Un vector director suyo será la dirección de r ($\vec{u}$), ya que $r \subset \pi'$, y otro vector director de π' puede ser $\vec{v}$ pues queremos que π' sea perpendicular a π y $\vec{v} \perp \pi$ (ver figura).

Por tanto: $\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Desarrollando:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (2y + z - 1) - (-3y - x) = x + 5y + z - 1$$

Así pues, la ecuación general del plano que se pide es

$$\pi' \equiv x + 5y + z - 1 = 0$$



EJERCICIO 1

La velocidad de una partícula, medida en m/sg , está determinada en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$. Se pide:

- a) ¿En qué instante de tiempo del intervalo $[0, 3]$ se alcanza la velocidad máxima?
- b) Calcula $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido.

Solución

- a) Derivemos: $v'(t) = (2t + 2) \cdot e^{-t} + (t^2 + 2t) \cdot e^{-t} \cdot (-1) = e^{-t} (2t + 2 - t^2 - 2t) = e^{-t} (2 - t^2)$. Los puntos críticos o singulares (aquellos que es posible que sean extremos relativos) se encuentran entre las soluciones de la ecuación $v'(t) = 0$, es decir, $e^{-t} (2 - t^2) = 0 \Leftrightarrow 2 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \sqrt{2} \\ t_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$ (la función exponencial no se anula nunca).

El primero de los valores anteriores se encuentra en el intervalo $[0, 3]$. Veamos que es un máximo. Para ello debemos evaluar $t_1 = \sqrt{2}$ en la segunda derivada.

$$v''(t) = -e^{-t} (2 - t^2) + e^{-t} (-2t) = e^{-t} (t^2 - 2t - 2).$$

$v''(\sqrt{2}) = e^{-\sqrt{2}} (\sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} - 2) = -2\sqrt{2} \cdot e^{-\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}$ es un máximo relativo. Por tanto la velocidad máxima se alcanza en el instante $t = \sqrt{2}$ segundos.

Por cierto, dicha velocidad máxima será $v(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 1,17 \text{ m/seg}$.

- b) $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (t^2 + 2t)e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 2t}{e^t} = 0$. La razón de que el límite anterior sea cero es que el infinito de denominador es de "orden superior" que el infinito del numerador, pues el numerador es una función polinómica y el denominador una exponencial. También se podría aplicar la regla de L'Hôpital un par de veces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 2t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t + 2}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{e^t} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

La interpretación del resultado es que la recta $y = 0$ (el eje X), es una asíntota horizontal, con lo que, cuando $x \rightarrow +\infty$, la gráfica de la función se acerca indefinidamente al eje X sin llegar a tocarlo.

EJERCICIO 2

Calcula la integral indefinida: $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable $y = \sin x$).

Solución

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{1 + \sin^2 x} \cos x dx \left[\begin{array}{l} y = \sin x \\ dy = \cos x dx \end{array} \right] = \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \arctg y + C = \arctg(\sin x) + C.$$

EJERCICIO 3

Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$. Determina los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que se cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$.

Solución

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{vmatrix} = (2c) - (a-3)(b+2) = 2c - ab - 2a + 3b + 6.$$

$$\text{Como } |B| = 8 \Rightarrow 2c - ab - 2a + 3b + 6 = 8 \Rightarrow 2c - ab - 2a + 3b = 2.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+b+2 & 2a-6+c \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+6 & 2a+c-6 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2+a-3 \\ 2b+4 & b+2+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a-1 \\ 2b+4 & b+c+2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} b+6 & 2a+c-6 \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a-1 \\ 2b+4 & b+c+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b+6=4 \\ 2a+c-6=a-1 \\ b+2=2b+4 \\ c=b+c+2 \end{cases}$$

De la primera y de la tercera ecuación se deduce fácilmente que $b = -2$. Sustituyendo en la cuarta $c = -2 + c + 2$ que es una identidad cierta pero no proporciona más información sobre el valor de c .

Sustituyendo en la igualdad $2c - ab - 2a + 3b = 2$, se tiene que $2c + 2a - 2a - 6 = 2 \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4$.

Sustituyendo ahora este valor de c en $2a + c - 6 = a - 1$, tenemos finalmente que $2a + 4 - 6 = a - 1 \Rightarrow a = 1$.

EJERCICIO 4

Dado el plano $\pi \equiv x + z = 4$ y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

- Encuentra la ecuación general del plano π' paralelo a π que pasa por P .
- Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta r perpendicular a π que pasa por P .

Solución:

- Como π y π' son paralelos se tiene que $\pi' \equiv x + z = D$. Además, como $P(1, 1, 0) \in \pi' \Rightarrow 1 + 0 = D \Rightarrow D = 1$ y, por tanto, $\pi' \equiv x + z = 1 \Rightarrow \pi' \equiv x + z - 1 = 0$.

- Un vector perpendicular al plano π es $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$