EJERCICIO 1

a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Comprueba si la función $f(x)=x^2-4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3,3]$. **(1 punto)**

Solución

a) Para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$ ha de ser continua en $x=1$ (en el resto de los puntos es continua por tratarse de funciones elementales, las cuales son continuas en su dominio de definición).

La condición para que f sea continua en $x=1$ es que exista el límite de la función en $x=1$ y coincida con la imagen de la función en dicho punto. Y para que exista el límite en $x=1$ deben existir los límites laterales y ser iguales. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2+bx+2\right)=a+b+2=f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2}\right)=a-b \end{array}\right\}\Rightarrow a+b+2=a-b\Rightarrow 2b=-2\Rightarrow b=-1$$

La función derivada de f, exceptuando el punto $x=1$, es la siguiente:

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & \text{si} \quad x<1 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2b}{x^3} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Para que exista la derivada en $x=1$ deben existir las derivadas laterales en dicho punto y ser iguales:

$$f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow 2a+b=\frac{a}{2}+2b\Rightarrow 2a-\frac{a}{2}=b\Rightarrow \frac{3a}{2}=-1\Rightarrow a=-\frac{2}{3}$$

Resumiendo, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$ debe ser $a=-\dfrac{2}{3}$ y $b=-1$.

b) El enunciado del teorema de Rolle es el siguiente.

"Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el abierto (a,b). Si $f(a)=f(b)$, existe algún punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$".

La función $f(x)=x^2-4$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica, en particular será continua en $[-3,3]$ y derivable en $(-3,3)$. Además $f(-3)=5=f(3)$. Entonces se verifican todas las hipótesis del teorema de Rolle, con lo que debe existir $c\in(-3,3)$ tal que $f'(c)=0$.

De hecho, como $f'(x)=2x$, tal punto c será: $2c=0\Rightarrow c=0$.

EJERCICIO 2

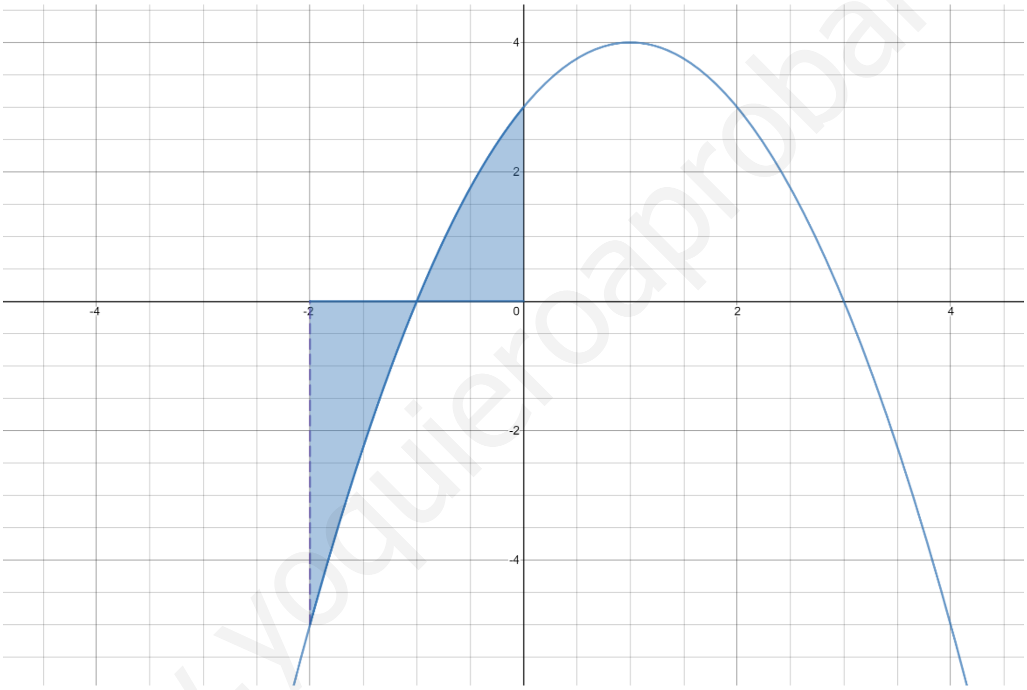
a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x)=-x^2+2x+3$, la recta $x=-2$ y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x=4$. **(1 punto)**

Solución

a) Veamos, en primer lugar, los puntos en los que la parábola corta al eje X: $-x^2+2x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$.

Entonces, el área A del recinto será: $A=\left|\int_{-2}^{-1}\left(-x^2+2x+3\right)dx\right|+\left|\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2x+3\right)dx\right|$ (ver figura):



Hagamos las dos integrales definidas por separado:

- $\int_{-2}^{-1}\left(-x^2+2x+3\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-2}^{-1}=\left(\frac{1}{3}+1-3\right)-\left(\frac{8}{3}+4-6\right)=-\frac{7}{3}$ (el signo menos indica que el área queda por debajo del eje X).
- $\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2x+3\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=\frac{5}{3}$.

Por tanto: $A=\left|\int_{-2}^{-1}\left(-x^2+2x+3\right)dx\right|+\left|\int_{-1}^{0}\left(-x^2+2x+3\right)dx\right|=\left|-\frac{7}{3}\right|+\left|\frac{5}{3}\right|=\frac{7}{3}+\frac{5}{3}=\frac{12}{3}=4\ \text{u}^2$.

b) La ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto $x=4$ es $y-g(4)=-\frac{1}{g'(4)}(x-4)$.

$g(4)=-4^2+2\cdot 4+3=-16+8+3=-5$, y como $g'(x)=-2x+2$, entonces $g'(4)=-2\cdot 4+2=-6$. Por tanto, la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en $x=4$ es $y+5=\frac{1}{6}(x-4)$.

EJERCICIO 3

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} ax+2y \quad =a^2 \\ -x+y+z=5 \\ x-ay-z=-(4+a) \end{array}\right\}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a=1$. **(1 punto)**

Solución

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos pues contiene un menor de orden dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2-0=2\neq 0$. Además, $|A|=(-a+2)-(2-a^2)=a^2-a$, de donde deducimos que $|A|=0\Leftrightarrow\begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$. Ahora podemos hacer las siguientes consideraciones según los valores del parámetro a:

- Si $a\neq 0$ y $a\neq 1$ el determinante de la matriz A es distinto de cero, con lo que $rg(A)=3=rg(B)=n$, donde B denota la matriz ampliada y n el número de incógnitas del sistema. En este caso el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $a=0$ la matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Orlando con el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2-0=2\neq 0$, tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}=-8-(-10)=2\neq 0$. Por tanto, en este caso $rg(A)=2\neq rg(A')=3$, con lo que el sistema es incompatible (no tiene soluciones).
- Si $a=1$ la matriz ampliada es $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, cuyo rango no puede ser tres porque la tercera fila es la opuesta de la segunda. Por tanto, en este caso $rg(A)=2=rg(B)<3=n$, con lo que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones), de grado de libertad $3-2=1$ (una incógnita libre).

b) Para $a=1$ hemos visto que el sistema tiene infinitas soluciones. Para hallarlas vamos a eliminar la tercera ecuación y vamos a llamar $z=\lambda$ (el grado de libertad es uno, es decir, una incógnita va libre): $\begin{cases} x+2y=1 \\ -x+y=5-\lambda \end{cases}$.

Sumando ambas ecuaciones se tiene que $3y=6-\lambda\Rightarrow y=\dfrac{6-\lambda}{3}$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación tenemos que $x+2\left(\dfrac{6-\lambda}{3}\right)=1\Rightarrow x=1-\dfrac{12-2\lambda}{3}\Rightarrow x=\dfrac{-9+2\lambda}{3}$.

EJERCICIO 4

Dados los puntos $A(1,2,0)$, $B(0,-1,2)$, $C(2,-1,3)$ y $D(1,0,1)$:

a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y por B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. **(1,25 puntos)**

b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. **(1,25 puntos)**

Solución

a) Un vector director de la recta que pasa por A y por B es $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-1,-3,2)$. Un plano con esta dirección que contenga al punto A o al punto B, contendrá a toda la recta que pasa por A y por B. Como el plano ha de ser paralelo a la reta que pasa por C y D, su otra dirección ha de ser $\vec{v}=\overrightarrow{CD}=(-1,1,-2)$. Por tanto, el plano que se pide es: $\pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z\\ -1 & -3 & 2\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\pi\equiv(6x-6-2y+4-z)-(3z+2y-4+2x-2)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\pi\equiv 4x-4y-4z+4=0\Rightarrow\pi\equiv x-y-z+1=0$.

b) Sean $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$ y $D(d_1,d_2,d_3)$ cuatro puntos del espacio. Al unirlos entre sí de todas las maneras posibles, determinan un tetraedro cuyo volumen V es igual a la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right)$, es decir

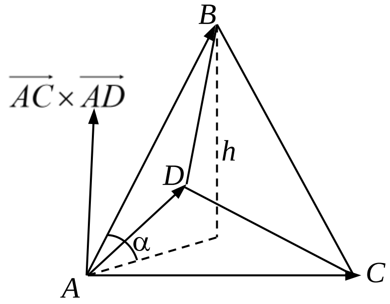
$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3\end{vmatrix}\right|$$

Demostración

El volumen del tetraedro es la tercera parte del área de la base por la altura. Entonces $V=\dfrac{1}{3}(\text{Área } ACD)\cdot h=$

$=\dfrac{1}{3}(\text{Área } ACD)\cdot AB\cdot\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{1}{3}(\text{Área } ACD)\cdot AB\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=$

$=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3\end{vmatrix}$.



Según el orden en que tomemos los vectores ese determinante puede salir positivo o negativo. Por lo tanto, para que el volumen sea positivo, en la fórmula pondremos el valor absoluto del determinante.

En el caso de este ejercicio, dados los puntos $A(1,2,0)$, $B(0,-1,2)$, $C(2,-1,3)$ y $D(1,0,1)$, el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D es:

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}0-1 & -1-2 & 2-0\\ 2-1 & -1-2 & 3-0\\ 1-1 & 0-2 & 1-0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-1 & -3 & 2\\ 1 & -3 & 3\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|(3-4)-(-3+6)\right|=\frac{1}{6}\left|-1-3\right|=\frac{1}{6}\left|-4\right|=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\text{ uds}^3.$$

EJERCICIO 5

a) Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó ser defectuoso, que no fuera fabricado por C. **(0,5 puntos)**

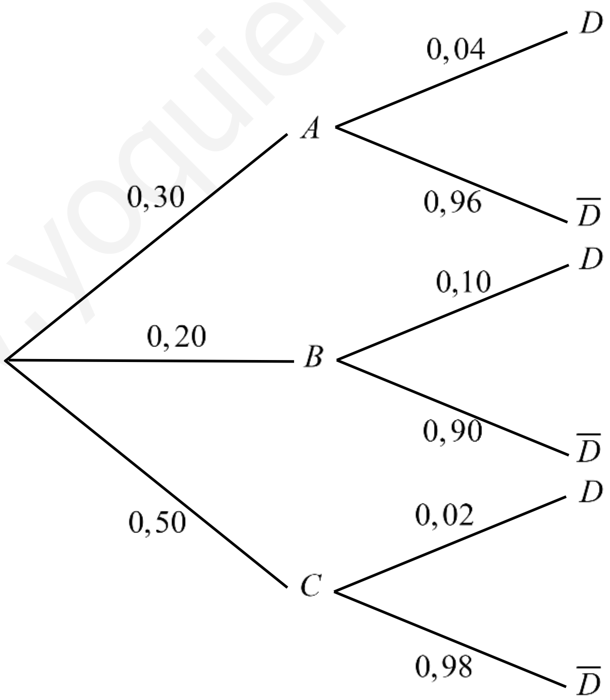
b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas. **(0,75 puntos)**

b2) Al menos tres chicos. **(0,5 puntos)**

Solución

a) Sean A, B y C los sucesos "elegido un tractor al azar, es producido en la fábrica A, B o C", respectivamente. Entonces, según el enunciado, $P(A)=0,30$, $P(B)=0,20$ y $P(C)=0,50$.



Llamemos ahora D al suceso "el tractor elegido es defectuoso". Entonces, según el enunciado, tenemos las siguientes probabilidades condicionadas: $P(D/A)=0,04$, $P(D/B)=0,10$, $P(D/C)=0,02$. Todo lo anterior se puede resumir en el diagrama de la página anterior ($\overline{D}$ es el suceso "el tractor elegido no es defectuoso").

Usando el teorema de la probabilidad total tenemos que la probabilidad de que un tractor no salga defectuoso es:

$$P(\overline{D})=P(\overline{D}\cap A)+P(\overline{D}\cap B)+P(\overline{D}\cap C)=P(A)\cdot P(\overline{D}/A)+P(B)\cdot P(\overline{D}/B)+P(C)\cdot P(\overline{D}/C)=$$

$$=0,30\cdot 0,96+0,20\cdot 0,90+0,50\cdot 0,98=0,288+0,18+0,49=0,958.$$

Si resultó ser defectuoso, la probabilidad de que no fuera fabricado por C viene dada por la siguiente probabilidad condicionada (teorema de Bayes):

$$P(\overline{C}/D)=\frac{P(\overline{C}\cap D)}{P(D)}=\frac{P(D-C)}{P(D)}=\frac{P(D)-P(D\cap C)}{P(D)}=\frac{P(D)-P(C)\cdot P(D/C)}{P(D)}=$$

$$=\frac{1-P(\overline{D})-P(C)\cdot P(D/C)}{1-P(\overline{D})}=\frac{1-0,958-0,50\cdot 0,02}{1-0,958}=\frac{0,042-0,01}{0,042}=\frac{0,032}{0,042}=0,762.$$

También se podría haber hecho teniendo en cuenta que si no fuera fabricado por C, tendría que haber sido fabricado por A o por B, es decir, calculando la suma de probabilidades siguiente:

$$P(A/D)+P(B/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}+\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{0,30\cdot 0,04+0,20\cdot 0,10}{0,042}=\frac{0,012+0,02}{0,042}=\frac{0,032}{0,042}=0,762.$$

b) Para calcular las probabilidades que se piden supondremos que se trata de un experimento binomial. Solo se pueden dar dos posibilidades: o elijo a un chico o elijo a una chica. Tomaremos como éxito elegir a un chico. Entonces $p=4/20=0,2$. Además $n=5$, pues elijo al azar un chico o una chica los cinco días laborables de la semana. Tenemos pues que la variable X número de éxitos (número chicos elegidos los cinco días) sigue una distribución binomial $B(n,p)=B(5,\ 0,2)$. En general se tiene que

$$P(X=r)=\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$$

La probabilidad de que salgan a la pizarra exactamente tres chicas es la misma que la de que salgan exactamente dos chicos, es decir:

$$P(X=2)=\binom{5}{2}0,2^2\cdot 0,8^3=10\cdot 0,0625\cdot 0,421875\cong 0,2048.$$

La probabilidad de que salgan al menos tres chicos será:

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)=\binom{5}{3}0,2^3\cdot 0,8^2+\binom{5}{4}0,2^4\cdot 0,8^1=0,0512+0,0064=0,0576.$$

EJERCICIO 1

Calcula razonadamente los siguientes límites: **(1,25 puntos por límite)**.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$

Solución

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=\left(\frac{2}{2}\right)^{\frac{1}{0}}=\left[\text{Indeterminación } 1^{\infty}\right]=(*)$

Llamemos $f(x)=\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$. Entonces, si $g(x)\left(f(x)-1\right)\to L\Rightarrow f(x)^{g(x)}\to e^{L}$

$$\lim_{x\to 1}\left[g(x)\left(f(x)-1\right)\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}\cdot\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}-1\right)\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{x-1}\cdot\frac{2e^{x-1}-x-1}{x+1}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{2xe^{x-1}-x^2-x}{x^2-1}=$$

$$=\left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2e^{x-1}+2xe^{x-1}-2x-1}{2x}=\frac{2+2-2-1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Por tanto: $(*)=\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=e^{\frac{1}{2}}$.

b) $$\lim_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}=\frac{-e^{0}-(-1)}{1-4+3}=\left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{-2xe^{x^2-1}-1}{2x+4}=\frac{-2(-1)e^{0}-1}{-2+4}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}.$$

EJERCICIO 2

Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ con $x\in\mathbb{R}$.

a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

Solución

a) $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. Entonces $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$.

$$f''(x)=\frac{-2\left(1+x^2\right)^2-(-2x)2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-2\left(1+x^2\right)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Como $f''(0)=\dfrac{-2}{1}=-2<0$, tenemos que $x=0$ es un máximo. Concretamente, el punto $\left(0,f(0)\right)=(0,1)$.

$g'(x)=x$. Entonces $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

$g''(x)=1>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Entonces $x=0$ es un mínimo. Concretamente, el punto $(0,g(0))=(0,0)$

b) Calculemos en primer lugar las abscisas de los puntos en los que se cortan las gráficas de $f(x)$ y de $g(x)$:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\Rightarrow 2=x^2+x^4\Rightarrow x^4+x^2-2=0\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

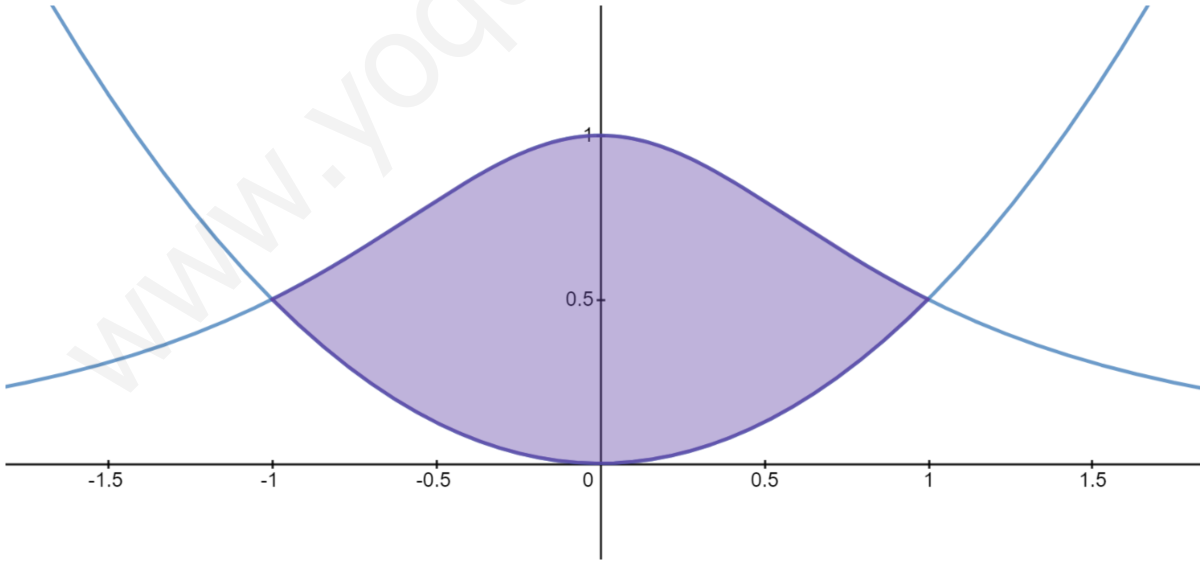
Además, entre $x=-1$ y $x=1$ es $f(x)\geq g(x)$ pues ambas funciones son continuas y en $x=0$ f tiene un máximo y g tiene un mínimo. Por tanto, el área A del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ viene dada por (ver figura al final del ejercicio):

$$A=\int_{-1}^{1}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\int_{-1}^{1}\frac{2-x^2(1+x^2)}{2(1+x^2)}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{-x^4-x^2+2}{x^2+1}dx\,.$$

Calculemos la integral indefinida $\int\frac{-x^4-x^2+2}{x^2+1}dx$. Se trata de una integral racional. Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, efectuamos la división, obteniendo como cociente el polinomio $-x^2$ y de resto 2. Por tanto: $-x^4-x^2+2=-x^2(x^2+1)+2\Rightarrow\frac{-x^4-x^2+2}{x^2+1}=-x^2+\frac{2}{x^2+1}$. Así:

$$\frac{1}{2}\int\frac{-x^4-x^2+2}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\left(-x^2+\frac{2}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{x^3}{3}+2\operatorname{arctg}x+C\right)=-\frac{x^3}{6}+\operatorname{arctg}x+D$$. Y entonces:

$$A=\left[-\frac{x^3}{6}+\operatorname{arctg}x\right]_{-1}^{1}=\left(-\frac{1}{6}+\operatorname{arctg}1\right)-\left(\frac{1}{6}+\operatorname{arctg}(-1)\right)=\left(-\frac{1}{6}+\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\pi}{4}-\frac{2}{6}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\cong 1,24\text{ u}^2.$$



EJERCICIO 3

Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\text{ y } C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. **(1 punto)**

b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $AX-2B=C$. **(1,5 puntos)**

Solución

a) $|A|=(0+0-1)-(-2+0+0)=-1+2=1$. Como $|A|\neq 0$, existe la inversa, que es $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t$ donde $\left(A^d\right)^t$ denota la matriz traspuesta de la matriz adjunta de A. Hallemos pues la matriz adjunta de A.

$$A^d=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&2&-3\\1&1&-2\end{pmatrix}$$. Entonces, finalmente: $$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}.$$

b) $AX-2B=C\Rightarrow AX=C+2B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}(C+2B)\Rightarrow X=A^{-1}(C+2B)$. Por tanto:

$$X=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&5&5\\1&3&2\\2&-1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&8\\4&5&10\\-9&-12&-23\end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 4

Sean la recta $r\equiv\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$, el punto $P(3,1,-1)$ y el plano $\pi\equiv 2x+y-z=0$

a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. **(1,25 puntos)**

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. **(1,25 puntos)**

Solución

a) En general, si $r\equiv\frac{x-a_1}{u_1}=\frac{y-a_2}{u_2}=\frac{z-a_3}{u_3}$ y $P(p_1,p_2,p_3)$, entonces la distancia de P a r viene dada por:

$$d(P,r)=\frac{\left|(p_1-a_1,p_2-a_2,p_3-a_3)\times(u_1,u_2,u_3)\right|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}$$

Calculemos primero el producto vectorial:

$$(3-1,1-0,-1-(-1))\times(3,1,2)=(2,1,0)\times(3,1,2)=\begin{vmatrix}i&j&k\\2&1&0\\3&1&2\end{vmatrix}=(2i+2k)-(3k+4j)=2i-4j-k$$

Entonces:

$$d(P,r)=\frac{\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2}}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{63}}{6}=\frac{3\sqrt{7}}{6}=\frac{\sqrt{7}}{2}\text{ uds.}$$

b) Un plano paralelo a π es siempre de la forma $2x+y-z+D=0$. Si este plano paralelo ha de contener al punto $P(3,1,-1)$, entonces $2\cdot 3+1-(-1)+D=0\Rightarrow 8+D=0\Rightarrow D=-8$. Por tanto el plano paralelo a π que contiene a P es $\pi'\equiv 2x+y-z-8=0$.

Por otro lado, las ecuaciones paramétricas de la recta r son $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$. Sustituyendo en la ecuación del plano π', $2(1+3\lambda)+\lambda-(-1+2\lambda)-8=0 \Rightarrow 2+6\lambda+\lambda+1-2\lambda-8=0 \Rightarrow 5\lambda=-5 \Rightarrow \lambda=-1$.

De aquí deducimos que el punto Q de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P es $Q(1+3(-1),-1,-1+2(-1)) = Q(-2,-1,-3)$.

Lo que se pide es la recta que pasa por P y Q, la cual daremos en forma continua:

$$\frac{x-3}{-2-3} = \frac{y-1}{-1-1} = \frac{z+1}{-3-(-1)} \Rightarrow \frac{x-3}{-5} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{-2}$$

EJERCICIO 5

a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de $0,98$ y de que se active el segundo es de $0,96$. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**

a2) Se active sólo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10,2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

b1) Entre $6,5$ y 13 horas. **(0,75 puntos)**

b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Solución

a) Llamemos A y B a los sucesos "que ante una emergencia se active el sensor A" y "que ante una emergencia se active el sensor B", respectivamente. Entonces $P(A)=0,98$ y $P(B)=0,96$.

Como ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente, la probabilidad de la intersección de los sucesos es igual al producto de sus probabilidades: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,98 \cdot 0,96 = 0,9408$.

a1) La probabilidad de que se active al menos uno de los dos sensores es igual a la probabilidad de que se active uno, de que se active el otro o de que se activen ambos, es decir, igual a la probabilidad de la unión de ambos sucesos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,98 + 0,96 - 0,9408 = 0,9992.$$

a2) La probabilidad de que se active sólo uno de los sensores es la de que se active el sensor A pero no el B, o bien la de que se active el sensor B pero no el A. Como los sucesos $A-B$ y $B-A$ son disjuntos la probabilidad de la unión de ambos es igual a la suma de las probabilidades:

$$P\left(\left(A-B\right)\cup\left(B-A\right)\right)=P\left(A-B\right)+P\left(B-A\right)=P\left(A\right)-P\left(A\cap B\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)=$$
$$=0,98-0,9408+0,96-0,9408=0,0584\,.$$

b) Llamemos X a la variable "tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica". Según el enunciado X se distribuye según una normal $N\left(10,2\right)$. Por tanto, la variable tipificada $Z=\dfrac{X-10}{2}$ se distribuye según una normal de media 0 y desviación 1 (distribución normal estándar), cuyas probabilidades $P\left(Z\leq a\right)$ podemos mirar en la tabla adjunta.

b1) La probabilidad de que el tiempo de espera se encuentre entre $6,5$ y 13 horas viene dada por:

$$P\left(6,5\leq X\leq 13\right)=P\left(X\leq 13\right)-P\left(X\leq 6,5\right)=P\left(Z\leq\frac{13-10}{2}\right)-P\left(Z\leq\frac{6,5-10}{2}\right)=$$
$$=P\left(Z\leq 1,5\right)-P\left(Z\leq -1,75\right)=P\left(Z\leq 1,5\right)-\left(1-P\left(Z\leq 1,75\right)\right)=0,9332-\left(1-0,9599\right)=0,8931\,.$$

Por tanto, el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar entre $6,5$ y 13 horas es del $89,31\%$

b2) La probabilidad de que el tiempo de espera sea menor de siete horas es:

$$P\left(X\leq 7\right)=P\left(Z\leq\frac{7-10}{2}\right)=P\left(Z\leq -1,5\right)=1-P\left(Z\leq 1,5\right)=1-0,9332=0,0668\,.$$

Por tanto, solo el $6,68\%$ de las intervenciones se pueden realizar en menos de siete horas.