

EJERCICIO 1

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**
- b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2, 6]$.

Solución

- a) Para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$ ha de ser continua en $x = 2$ (en el resto de puntos es continua por tratarse de funciones polinómicas). Para ello debe existir el límite de la función en $x = 2$ y coincidir con la imagen de la función en dicho punto. Y para que exista el límite en $x = 2$ deben existir los límites laterales y ser iguales. Es decir:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + a) = 4 + a = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + bx - 9) = 2b - 13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4 + a = 2b - 13$$

La función derivada de f , exceptuando el punto $x = 2$, es la siguiente:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ -2x + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que exista la derivada en $x = 2$ deben existir las derivadas laterales en dicho punto y ser iguales:

$$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow 4 = -4 + b \Rightarrow b = 8$$

Entonces $4 + a = 2 \cdot 8 - 13 \Rightarrow 4 + a = 3 \Rightarrow a = -1$.

Resumiendo, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$ debe ser $a = -1$ y $b = 8$.

- b) Enunciado del teorema de Rolle.

“Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b) . Si $f(a) = f(b)$, existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$ ”.

Para los valores hallados en el apartado a) la función queda de la siguiente manera:

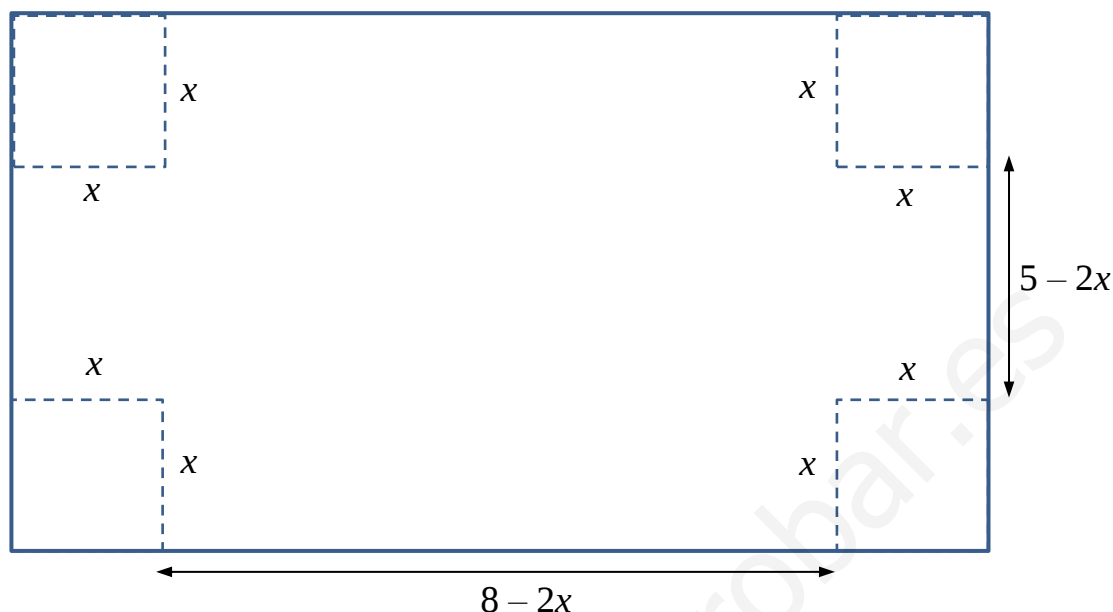
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + 8x - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Según se ha visto, la función anterior es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, en particular será continua en $[-2, 6]$ y derivable en $(-2, 6)$. Además $f(-2) = 3 = f(6)$. Entonces se verifican todas las hipótesis del teorema de Rolle, con lo que debe existir $c \in (-2, 6)$ tal que $f'(c) = 0$.

EJERCICIO 2

Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón. **(2,5 puntos)**

Solución



Si cortamos cuadrados de lado x en las esquinas, los lados de la base de la caja medirán $8 - 2x$ metros y $5 - 2x$ metros, tal y como se aprecia en la figura anterior. La altura de la caja será pues de x metros. De este modo, el volumen de la caja vendrá dado por

$$V = x(8 - 2x)(5 - 2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$$

Derivemos e igualemus a cero la derivada para extraer los posibles extremos de la función volumen:

$$V' = 12x^2 - 52x + 40 ; V' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 52x + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

Para decidir cuál de los dos es el máximo evaluemos en la segunda derivada, que es $V'' = 24x - 52$:

$$V''\left(\frac{10}{3}\right) = 24 \cdot \frac{10}{3} - 52 = 80 - 52 = 28 > 0. \text{ Entonces } x = \frac{10}{3} \text{ es un mínimo.}$$

$$V''(1) = 24 \cdot 1 - 52 = -28 < 0. \text{ Entonces } x = 1 \text{ es un máximo.}$$

Por tanto, las dimensiones del cajón para que el volumen sea máximo serán 6×3 metros de la base y 1 metro de altura.

EJERCICIO 3

a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left. \begin{aligned} ax - y + z &= a - 4 \\ 2x + y - az &= a - 1 \\ y - z &= -3 \end{aligned} \right\} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$. (1 punto)

Solución

a) La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos dos pues contiene un menor de orden

dos distinto de cero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$. Además, $|A| = (-a + 2) - (2 - a^2) = a^2 - a$, de donde deducimos

que $|A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$. Ahora podemos hacer las siguientes consideraciones según los valores del parámetro a :

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el determinante de la matriz A es distinto de cero, con lo que $rg(A) = 3 = rg(A') = n$, donde A' denota la matriz ampliada y n el número de incógnitas del sistema. En este caso el sistema es compatible determinado (solución única).

- Si $a = 0$ la matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Orlando con el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$,

tenemos que $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -8 - 6 = -14 \neq 0$. Por tanto, en este caso $rg(A) = 2 \neq rg(A') = 3$, con lo que

el sistema es incompatible (no tiene soluciones).

- Si $a = 1$ la matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Volviendo a orlar con el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, tenemos que

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-3 - 6) - 6 = -15 \neq 0$. En este caso volvemos a tener que $rg(A) = 2 \neq rg(A') = 3$, con lo

que el sistema vuelve a ser incompatible.

b) Para $a = -1$ el sistema es compatible determinado. Tenemos que $|A| = (-1)^2 - (-1) = 1 + 1 = 2$. Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{(5 + 3 - 2) - (-3 - 2 - 5)}{2} = \frac{6 + 10}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{(-2 - 6) - (10 + 3)}{2} = \frac{-8 - 13}{2} = -\frac{21}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{(3 - 10) - (6 + 2)}{2} = \frac{-7 - 8}{2} = -\frac{15}{2}$$

EJERCICIO 4

Dado el punto $P(2,0,-1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

- a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s . **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s . **(1 punto)**

Solución

- a) Un punto y un vector director de la recta r son, respectivamente, $A(2,-1,0)$ y $\vec{u}=(-1,2,0)$.

Las ecuaciones paramétricas de la recta s son $s \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Entonces, un punto y un vector director de la recta s son, respectivamente, $B(-1,3,0)$ y $\vec{v}=(-1,1,1)$.

El rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $rg \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, pues podemos encontrar

un menor de orden dos distinto de cero, por ejemplo, $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1 \neq 0$. Esto quiere decir que

los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección y, por tanto, las rectas r y s no pueden ser ni paralelas ni coincidentes.

Estudiemos ahora el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}=(-3,4,0)$:

$$rg \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ ya que } \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -6 - (-4) = -6 + 4 = -2 \neq 0$$

De lo anterior se deduce que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son linealmente independientes, es decir, no pueden ser coplanarios, con lo que las rectas r y s no pueden ser secantes.

Solamente queda una posibilidad: r y s se cruzan.

- b) Para que el plano π que pasa por $P(2,0,-1)$ sea paralelo a r y a s , basta que tenga las direcciones de r y de s . Es decir:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2x-4-z-1) - (-2z-2-y) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+y+z-3=0$$

EJERCICIO 5

- a) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30 % y el 20 % de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6 % de las resistencias producidas por A, el 5 % de las producidas por B y el 3 % de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

- a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa. **(0,75 puntos)**
a2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A. **(0,5 puntos)**

- b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:
- b1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B. **(0,75 puntos)**
- b2) Que en una caja haya al menos dos fabricadas por B. **(0,5 puntos)**

Solución

- a) Llamemos A , B y C a los sucesos “elegida una resistencia al azar, es producida por el operario A, B y C, respectivamente”. Entonces $P(A) = 0,50$, $P(B) = 0,30$ y $P(C) = 0,20$.

Llamemos ahora D al suceso “la resistencia elegida es defectuosa”. Entonces, según el enunciado, tenemos las siguientes probabilidades condicionadas: $P(D/A) = 0,06$, $P(D/B) = 0,05$, $P(D/C) = 0,03$.

Usando el teorema de la probabilidad total tenemos que la probabilidad de que una pieza sea defectuosa es:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) = \\ &= 0,50 \cdot 0,06 + 0,30 \cdot 0,05 + 0,20 \cdot 0,03 = 0,03 + 0,015 + 0,006 = 0,051 \end{aligned}$$

Si es defectuosa, la probabilidad de que proceda del operario A viene dada por la siguiente probabilidad condicionada (teorema de Bayes):

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{0,50 \cdot 0,06}{0,051} = \frac{0,03}{0,051} \cong 0,588$$

- b) Para calcular las probabilidades que se piden supondremos que se trata de un experimento binomial. Solo se pueden dar dos posibilidades: o la pieza está producida por B o no está producida por B. Tomaremos por éxito que la pieza esté producida por B. Entonces $p = P(B) = 0,30$. Además $n = 5$ pues las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Tenemos pues que la variable X número de éxitos (número de piezas producidas por B) sigue una distribución binomial $B(n, p) = B(5, 0,30)$. En general se tiene que

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

La probabilidad en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B es:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} 0,3^3 \cdot 0,7^2 = 10 \cdot 0,027 \cdot 0,49 = 0,1323$$

La probabilidad de que en una caja haya al menos dos fabricadas por B es:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \left[\binom{5}{0} 0,3^0 \cdot 0,7^5 + \binom{5}{1} 0,3^1 \cdot 0,7^4 \right] = \\ &= 1 - [0,16807 + 0,36015] = 1 - 0,52822 = 0,47178 \end{aligned}$$

EJERCICIO 1

Calcula razonadamente los siguientes límites: **(1,25 puntos por límite)**.

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2 \cos x}$

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 + x - 2)}{(x+2)(x^2 + 3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} =$
 $= \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2-1}{-2+1} = \frac{-3}{-1} = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x+1)}{2 - 2 \cos x} = \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}}{2 \sin x} = \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0} \right] =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}}{2 \cos x} = \frac{1+1}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$

En este último apartado se ha hecho uso de la regla de L'Hôpital (dos veces) para calcular el límite.

EJERCICIO 2

Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$

a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por sus gráficas. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$.
(1 punto)

Solución

a) Calculemos en primer lugar las abscisas de los puntos en los que se cortan las gráficas de $f(x)$ y de $g(x)$:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 = x^2 - 2x - 4 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Además, entre $x = -1$ y $x = 2$ es $f(x) \geq g(x)$ pues la inecuación $-x^2 \geq x^2 - 2x - 4$ es equivalente a $2x^2 - 2x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x-2) \leq 0$, cuya solución es precisamente el intervalo $[-1, 2]$. Por tanto, el área A del recinto cerrado limitado por las gráficas de f y g viene dada por la siguiente integral definida:

$$\int_{-1}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 = \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8 \right) - \left(\frac{2}{3} + 1 - 4 \right) = 9 \text{ uds}^2$$

b) La recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$ es la perpendicular a la recta tangente en dicho punto. La recta tangente viene dada por $y - g(-3) = g'(-3)(x - (-3))$. La derivada de la función g es

$g'(x) = 2x - 2$. Por tanto, $g'(-3) = -8$. Como $g(-3) = 11$, tenemos que la recta tangente en $x = -3$ es $y - 11 = -8(x + 3) \Rightarrow y = -8x - 13$.

Dos puntos de esta recta son, por ejemplo, el $(-3, 11)$ y el $(-2, 3)$, luego un vector director suyo es $\vec{u} = (1, -8)$. Un vector perpendicular al anterior es fácil de calcular, por ejemplo: $\vec{v} = (8, 1)$. Por tanto, la recta normal es la que pasa por el punto $(-3, 11)$ y tiene dirección la del vector $\vec{v}$:

$$\frac{x+3}{8} = \frac{y-11}{1} \Rightarrow 8y - 88 = x + 3 \Rightarrow x - 8y + 91 = 0$$

Este apartado se podría haber resuelto sabiendo que la pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{m}$ donde m es la pendiente de la recta tangente. Es decir, la pendiente de la recta normal en nuestro caso sería $\frac{1}{8}$ y de aquí, la recta normal en $x = -3$ es de la forma $y = \frac{1}{8}x + n$. Como esta recta pasa por el punto $(-3, 11)$ se tiene, sustituyendo, que

$$11 = \frac{1}{8} \cdot (-3) + n \Rightarrow 88 = -3 + 8n \Rightarrow 8n = 91 \Rightarrow n = \frac{91}{8}$$

Por tanto, la recta que se busca es $y = \frac{1}{8}x + \frac{91}{8}$ (esta es la ecuación afín o explícita de la recta). Si se pasa a general o implícita se obtiene $x - 8y + 91 = 0$.

EJERCICIO 3

Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 + B$? Razona la respuesta. I_3 es la matriz identidad de orden 3. (1 punto)
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - X \cdot B$. (1,5 puntos)

Solución

$$a) \quad 2I_3 + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que una matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de cero. Como

$$|2I_3 + B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

resulta que, efectivamente, la matriz $2I_3 + B$ tiene inversa.

$$b) \quad 2X + C = A - X \cdot B \Rightarrow 2X + XB = A - C \Rightarrow X(2I_3 + B) = A - C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(2I_3 + B)(2I_3 + B)^{-1} = (A - C)(2I_3 + B)^{-1} \Rightarrow X = (A - C)(2I_3 + B)^{-1}$$

La matriz adjunta de $2I_3 + B$ es $(2I_3 + B)^d = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

La traspuesta de la adjunta es $\left[(2I_3 + B)^d\right]^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, la matriz inversa es $(2I_3 + B)^{-1} = \frac{1}{|2I_3 + B|} \left[(2I_3 + B)^d\right]^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Así pues: $X = (A - C)(2I_3 + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 4

- a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0,1,-2)$ y $Q(4,-3,0)$. **(1 punto)**
- b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

Solución

- a) Un vector director de la recta es $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (4, -4, 2)$. Podemos tomar como vector director uno proporcional al anterior más sencillo de manejar, por ejemplo $\vec{u} = (2, -2, 1)$. La ecuación de la recta en su forma continua es $\frac{x-0}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{1}$, y en su forma general o implícita es

$$\begin{cases} -2x = 2y - 2 \\ x = 2z + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

La ecuación general o implícita puede adoptar distintas maneras. Antes hemos eliminado denominadores igualando las razones primera y segunda por un lado, y primera y tercera, por otro. Pero si eliminamos denominadores con la primera y segunda, y con la segunda y tercera obtenemos:

$$\begin{cases} -2x = 2y - 2 \\ y - 1 = -2z - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

- b) Un punto A de r es siempre de la forma $A(2 + \lambda, -\lambda, -5)$. Si deseamos encontrar un punto de la recta r que equidiste (estar a la misma distancia) de P y Q , se ha de cumplir que $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AQ}|$. Tenemos que

$$\overrightarrow{AP} = (2 + \lambda, -\lambda - 1, -3), \quad \overrightarrow{AQ} = (\lambda - 2, -\lambda + 3, -5).$$

Por tanto:

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(2 + \lambda)^2 + (-\lambda - 1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 4\lambda + \lambda^2 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 + 9} = \sqrt{2\lambda^2 + 6\lambda + 14}$$

$$|\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{(\lambda - 2)^2 + (-\lambda + 3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda + 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 9 + 25} = \sqrt{2\lambda^2 - 10\lambda + 38}$$

Y de aquí deducimos que:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}| &= |\overrightarrow{AQ}| \Rightarrow \sqrt{2\lambda^2 + 6\lambda + 14} = \sqrt{2\lambda^2 - 10\lambda + 38} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\lambda^2 + 6\lambda + 14 &= 2\lambda^2 - 10\lambda + 38 \Rightarrow 16\lambda = 24 \Rightarrow \lambda = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

De este modo el punto buscado es:

$$A(2 + \lambda, -\lambda, -5) = A\left(2 + \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -5\right) = A\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -5\right)$$

EJERCICIO 5

- a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:
- a1) El libro elegido sea de matemáticas. **(0,75 puntos)**
- a2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B. **(0,5 puntos)**
- b) El tiempo de espera en una parada del autobús se distribuye según distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.
- b1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos. **(0,75 puntos)**
- b2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33 % de los usuarios? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Solución:

- a) Llamemos A y B a los sucesos “elegir la estantería A o B”, respectivamente. Entonces $P(A) = P(B) = 0,5$. Llamemos también N , E y M a los sucesos “elegir una novela, elegir un ensayo o elegir un libro de matemáticas”, respectivamente. Entonces, según el enunciado, tenemos las siguientes probabilidades condicionadas:

$$P(N/A) = \frac{20}{40} = 0,5 ; P(E/A) = \frac{10}{40} = 0,25 ; P(M/A) = \frac{10}{40} = 0,25$$

$$P(N/B) = \frac{12}{20} = 0,6 ; P(M/B) = \frac{8}{20} = 0,4$$

Según el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que el libro elegido sea de matemáticas es:

$$P(M) = P(M \cap A) + P(M \cap B) = P(M/A) \cdot P(A) + P(M/B) \cdot P(B) = 0,25 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,5 = 0,325$$

Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, la probabilidad de que fuera de la estantería B viene dada por la siguiente probabilidad condicionada (teorema de Bayes).

$$P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{P(M/B) \cdot P(B)}{P(M)} = \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,325} = \frac{0,2}{0,325} \cong 0,615$$

- b) Llamemos X a la variable “tiempo de espera”. X se distribuye según una normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos. Simbólicamente: $X \rightarrow N(15, 5)$. Por tanto, la variable $Z = \frac{X-15}{5}$ se distribuye según una normal de media 0 y desviación 1 (tipificación de la variable), cuyas probabilidades $P(Z \leq a)$ podemos mirar en la tabla adjunta.

La probabilidad de esperar menos de 13 minutos viene dada por:

$$P(X \leq 13) = P\left(Z \leq \frac{13-15}{5}\right) = P(Z \leq -0,4) = P(Z \geq 0,4) = 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446$$

Para saber los minutos de espera que son superados por el 33 % de los usuarios, llamaremos x al número de minutos y plantearemos la siguiente ecuación: $P(X \geq x) = 0,33$. Ahora operamos teniendo en cuenta las propiedades de la distribución normal:

$$\begin{aligned} P(X \geq x) = 0,33 &\Rightarrow 1 - P(X \leq x) = 0,33 \Rightarrow P(X \leq x) = 0,66 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-15}{5}\right) = 0,66 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x-15}{5} = 0,41 \Rightarrow x-15 = 2,05 \Rightarrow x = 17,05 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que el 33 % de los usuarios superan los 17,05 minutos de espera.