PAU - Matemáticas II - Junio 2014 - Propuesta A

Ejercicio 1

a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x^2 + be^x + 3 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 0$. **[1,5 puntos]**

b) Para los valores de a y b encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$. **[1 punto]**

Solución

a) Estudiemos la continuidad de f en $x = 0$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2 - 2x + a) = a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 + be^x + 3) = b + 3 \end{cases}$$

Por tanto, como también $f(0) = a$, para que f sea continua en $x = 0$ se ha de cumplir, por un lado, que $a = b + 3$.

Estudiemos ahora la derivabilidad de f en $x = 0$. Salvo en este punto la función derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x + be^x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Por tanto las derivadas laterales en $x = 0$ son: $\begin{cases} f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (2x - 2) = -2 \\ f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x + be^x) = b \end{cases}$

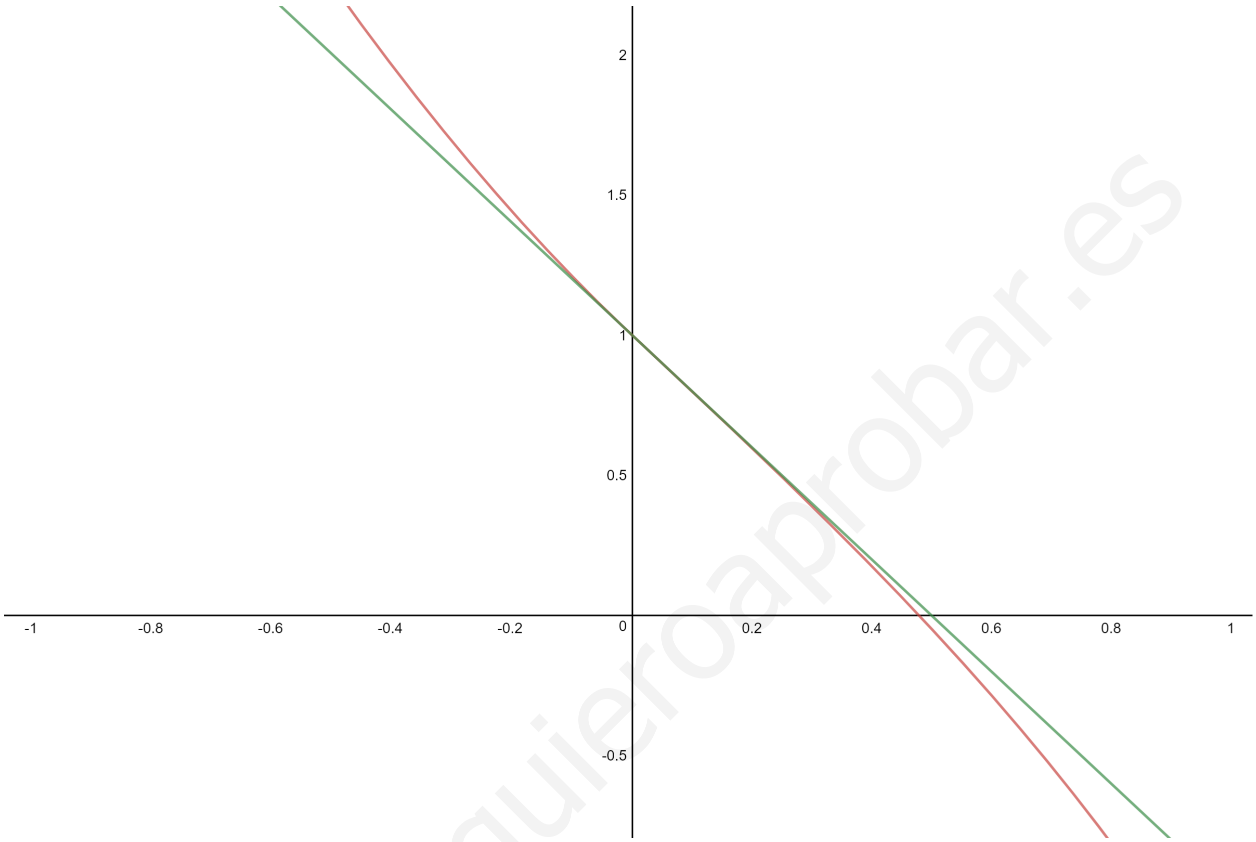
De aquí se deduce, por otro lado, que $b = -2$ y sustituyendo en $a = b + 3$ deducimos también que $a = 1$.

b) La imagen en $x = 0$ es $f(0) = a = 1$ y la derivada en $x = 0$ es $f'(0) = b = -2$. Por tanto, la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = -2x \Rightarrow y = -2x + 1$$

www.yoquieroaprobar.es

En la siguiente figura se puede apreciar la gráfica de la función (en rojo) y la recta tangente en $x = 0$ (en verde).



Obsérvese como en las cercanías de $x = 0$ la recta tangente se confunde con la gráfica de la función.

www.yoquieroaprobar.es

Ejercicio 2

Calcula la integral definida

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1)e^{-x} dx \qquad \textbf{[2,5 puntos]}$$

Solución

Realicemos primero, usando el método de integración por partes, la integral indefinida.

$$\int (x^2 + x + 1)e^{-x} dx = \left[\begin{array}{cc} u = x^2 + x + 1 & dv = e^x \\ du = (2x + 1)dx & v = e^x \end{array} \right] = (x^2 + x + 1)e^x - \int (2x + 1)e^x dx = (*)$$

Volviendo a aplicar el método de integración por partes en la última integral

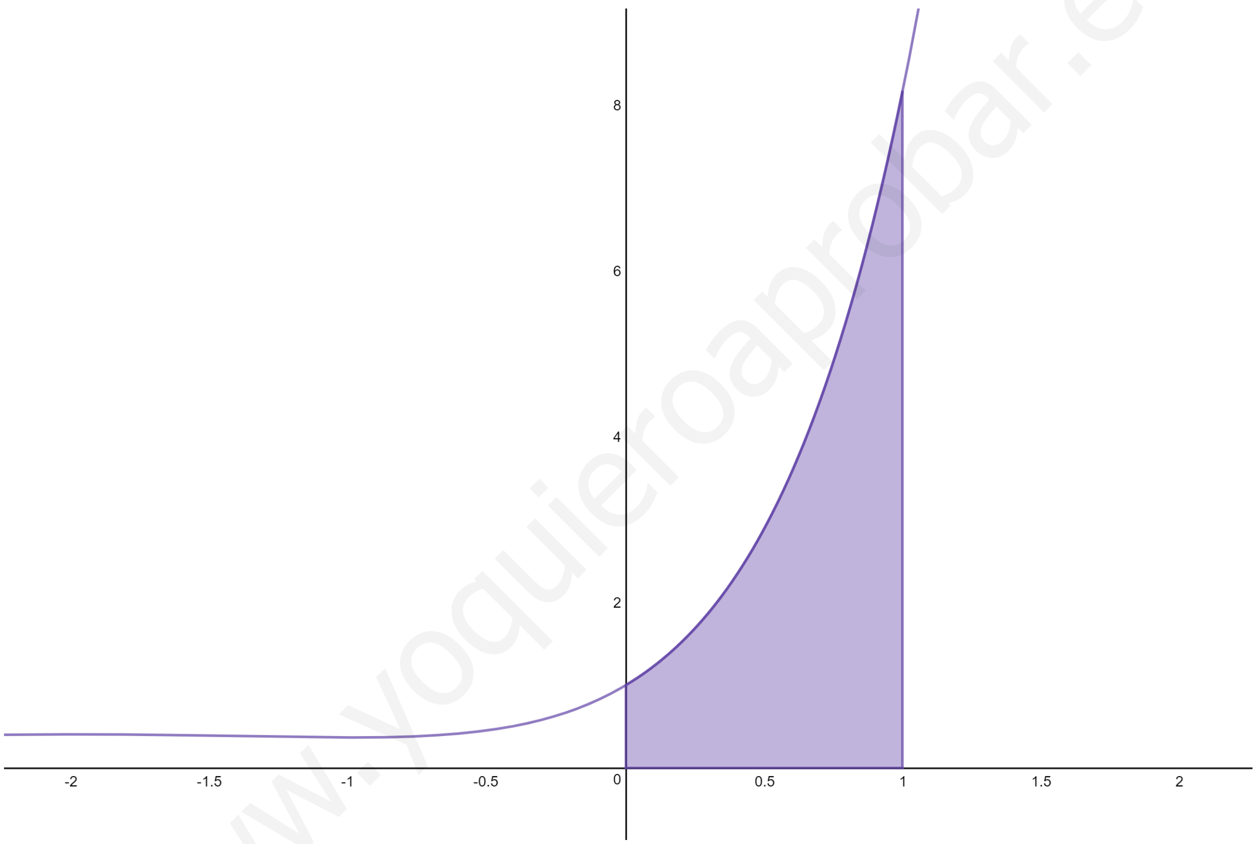
$$(*) = \left[\begin{array}{cc} u = 2x + 1 & dv = e^x \\ du = 2dx & v = e^x \end{array} \right] = (x^2 + x + 1)e^x - \left((2x + 1)e^x - \int 2e^x dx \right) =$$

$$= x^2e^x + xe^x + e^x - 2xe^x - e^x + 2e^x + C = x^2e^x - xe^x + 2e^x + C = (x^2 - x + 2)e^x + C$$

Usemos ahora la regla de Barrow para resolver la integral definida.

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1)e^{-x}dx = \left.(x^2 - x + 2)e^x\right]_0^1 = 2e - 2$$

La integral definida que se ha calculado representa el área del recinto representado en la figura siguiente.



Ejercicio 3

a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A| = 5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes

$$|-A| \quad ; \quad |A^{-1}| \quad ; \quad |A^T| \quad ; \quad |A^3| \qquad \textbf{[1 punto]}$$

b) Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

www.yoquieroaprobar.es

calcula, usando las propiedades de los determinantes,

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \qquad \textbf{[1,5 puntos]}$$

Solución

a) $|-A| = |-1 \cdot A| = |-1| \cdot |A| = 1 \cdot 5 = 5.$

Como $A \cdot A^{-1} = I$ donde I es la matriz identidad, se tiene que $|A \cdot A^{-1}| = |I| = 1$. Ahora, puesto que el determinante del producto es el producto de los determinantes: $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$ y de aquí $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}$.

El determinante de una matriz cuadrada es igual que el determinante de su traspuesta: $|A| = |A^T| = 5$.

$|A^3| = |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$

b) **Primer determinante.**

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = (*)$$

Se ha descompuesto el determinante en dos usando los sumandos de la primera fila. El segundo de los determinantes de la suma es cero porque tiene dos filas proporcionales (la primera y la tercera). A continuación vamos a descomponer el primer determinante de la suma en otros dos usando los sumandos de la segunda fila.

$$(*) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 = -6$$

El segundo de los sumandos vuelve a ser nulo por ser la tercera fila proporcional a la segunda. Luego hemos sacado 3 factor común del primer determinante y hemos cambiado el signo por intercambiar las filas primera y tercera.

www.yoquieroaprobar.es

Segundo determinante.

Desarrollando por los elementos de la primera fila, extrayendo factores de las filas correspondientes e intercambiando las dos últimas filas, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 30 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -400 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -400 \cdot 2 = -800.$$

Ejercicio 4

a) Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + y - 3z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = a \end{cases}$$

se corten en un punto. **[1,25 puntos]**

b) Para dicho valor de a, da la ecuación implícita de un plano π que contenga a r y a s. **[1,25 puntos]**

Solución

a) Si las rectas se cortan en un punto, el sistema de ecuaciones formado por ambas ha de ser compatible y determinado. Por tanto, el determinante de la matriz ampliada debe ser igual a cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & a-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & a-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & a-3 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & a-3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (a - 3 - (-4)) = -a - 1.$$

En el primer paso se han hecho ceros todos los términos de la primera columna salvo el primero. Para ello se ha sumado la segunda fila a la primera, a la tercera fila se le ha restado la primera y a la cuarta fila se le ha restado la primera previamente multiplicada por tres. A continuación, en el segundo paso se ha desarrollado el determinante por los elementos de la primera columna. En el tercer paso se ha sumado a la primera columna la segunda. Finalmente se ha vuelto a desarrollar por los elementos de la primera columna.

Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -a-1=0 \Leftrightarrow a=-1$$

Podemos hallar también el punto de corte. Si en la ecuación $x+y=0$ de la recta s despejamos y tenemos que $y=-x$. Sustituyendo en las ecuaciones de la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} y-z=1 \\ 2y-3z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-2z=2 \\ 2y-3z=2 \end{cases} \Rightarrow z=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=-1$$

De este modo obtenemos que el punto de corte de las rectas r y s es $(-1,1,0)$.

b) Hallemos un vector director $\vec{u}$ de r.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-6i+j+k)-(-2k-3j-i) = -5i+4j+3k \Rightarrow \vec{u}=(-5,4,3)$$

De igual modo, hallemos también un vector director $\vec{v}$ de s.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (i+2k)-(3k+j) = i-j-k \Rightarrow \vec{v}=(1,-1,-1)$$

Calculemos finalmente la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s. Esto es sencillo pues disponemos de un punto y dos vectores directores.

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ -5 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-4(x+1)+3(y-1)+5z)-(4z+5(y-1)-3(x+1)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x-4+3y-3+5z-4z-5y+5+3x+3=0 \Rightarrow \pi \equiv -x-2y+z+1=0$$