

EJERCICIO 1

- a) Enuncia el Teorema de del valor medio de Lagrange y da su interpretación geométrica.
- b) Calcula un punto del intervalo $[0, 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ sea paralela a la cuerda (o segmento) que une los puntos de la gráfica de $f(x)$ en $x=0$ y $x=2$.

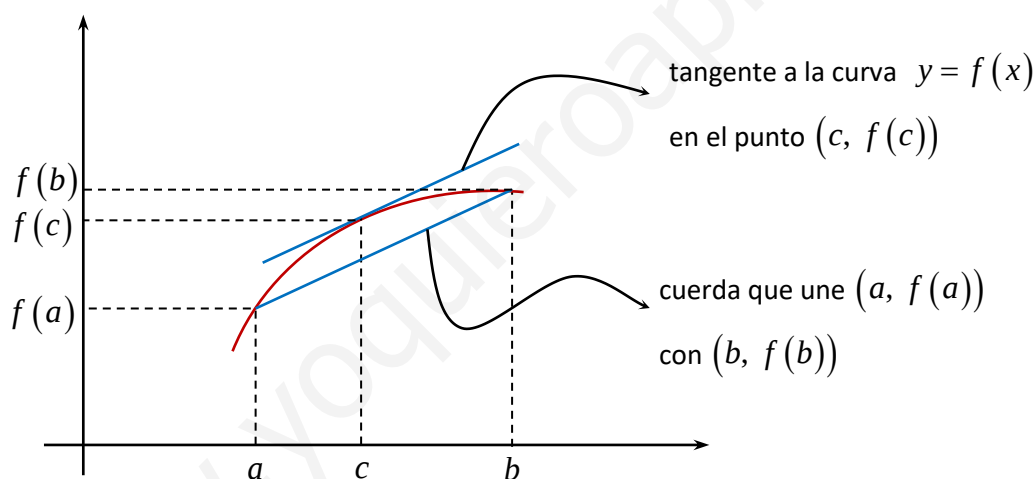
Solución

a) Teorema del valor medio de Lagrange.

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b) . Entonces existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Geoméricamente, el teorema de Lagrange asegura que existe al menos un punto c , comprendido entre a y b , tal que la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es paralela a la cuerda que une $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.



- b) La función derivada de f es $f'(x) = 6x + 2$. Tomando $a = 0$ y $b = 2$, y según el teorema del valor medio, existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

$$\text{Por tanto: } 6c + 2 = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \Rightarrow 6c + 2 = \frac{17 - 1}{2} \Rightarrow 6c + 2 = 8 \Rightarrow 6c = 6 \Rightarrow c = 1.$$

El ejercicio acaba aquí, pero es conveniente visualizar la situación.

La recta que pasa por los puntos $(a, f(a)) = (0, 1)$ y $(b, f(b)) = (2, f(2))$ tiene por ecuación $y = mx + n$.

EJERCICIO 2

Calcula la integral

$$\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx$$

Solución

Descompongamos la fracción $\frac{x+2}{x^3+x^2}$ en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{x+2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)} \Rightarrow Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2 = x+2.$$

En la última igualdad anterior vamos a sustituir x por algunos valores para obtener A , B y C :

- Si $x=0$, entonces $B=2$.
- Si $x=-1$, entonces $C=1$
- Si $x=1$, entonces $2A+2B+C=3 \Rightarrow 2A+4+1=3 \Rightarrow 2A=-2 \Rightarrow A=-1$

De este modo $\frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{x+2}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+1}$. Por tanto:

$$\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = -\ln x - \frac{2}{x} + \ln(x+1) + C.$$

EJERCICIO 3

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

- Calcula A^n cuando $n \in \mathbb{N}$ es par.
- Resuelve la ecuación matricial $6A^{20}X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3. (Indicación: Sustituye de inicio el valor de A^{20} para facilitar los cálculos).

Solución

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A; A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I; A^5 = A^4 \cdot A = I \cdot A = A, A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I, \dots$$

$$\text{De aquí podemos deducir que } A^n = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ cuando } n \in \mathbb{N} \text{ es par.}$$

$$\text{b) } 6A^{20}X = B - 3AX \Rightarrow 6IX = B - 3AX \Rightarrow 6IX + 3AX = B \Rightarrow (6I + 3A)X = B \Rightarrow X = (6I + 3A)^{-1} B.$$

$$6I + 3A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \text{ Llamemos } D = 6I + 3A \text{ y hallemos su inversa:}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 324 - 81 = 243; D^d = \begin{pmatrix} 54 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 0 \\ -27 & 0 & 54 \end{pmatrix}. \text{ Entonces:}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|} (D^d)^t = \frac{1}{243} \begin{pmatrix} 54 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 0 \\ -27 & 0 & 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54/243 & 0 & -27/243 \\ 0 & 27/243 & 0 \\ -27/243 & 0 & 54/243 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Finalmente: } X = D^{-1}B = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 4

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3} \quad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que r y s se corten en un punto. Da dicho punto de corte.
- Para el valor de a obtenido, calcula la ecuación general del plano π que contiene a r y s .

Solución

- Un punto y un vector director de r son, respectivamente, $A(-1,0,1)$ y $\vec{u} = (2,1,3)$. Un punto de s es $B(0,a,0)$ y un vector director de s es $\vec{v} = (1,1,-1)$. Para que las rectas se corten en un punto (sean secantes) debe de ocurrir que $\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 2$, que es lo mismo que decir que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección y, además, el vector $\overrightarrow{AB}$ está contenido en el plano determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Claramente $\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}) = 2$, ya que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales. Para que $\text{rango}(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 2$ el determinante formado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ ha de ser igual a dos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = (-2 - 1 + 3a) - (3 - 1 - 2a) = 5a - 5 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Para hallar el punto de corte vamos a escribir la ecuación general de cada una de las rectas y luego resolveremos el sistema formado por ambas.

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+1 = 2y \\ 3y = z-1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-2y = -1 \\ 3y-z = -1 \end{cases}.$$

$$s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = y-1 \\ -y+1 = z \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x-y = -1 \\ y+z = 1 \end{cases}$$

El sistema formado por ambas rectas es $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3y-z=-1 \\ x-y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}$. Como sabemos que tiene solución única podemos

eliminar una ecuación: $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3y-z=-1 \\ x-y=-1 \end{cases}$. Ahora, restando la primera y tercera ecuaciones: $-y=0 \Rightarrow y=0$. De

aquí se obtiene que $x=-1$ y que $z=1$. Así pues, el punto de corte de ambas rectas es $r \cap s = P(-1, 0, 1)$

- b) Tomaremos como punto del plano π el punto de corte de r y s : $P(-1, 0, 1)$, y los vectores directores del plano, los vectores directores de r y s : $\vec{u} = (2, 1, 3)$ y $\vec{v} = (1, 1, -1)$. Así, la ecuación del plano es:

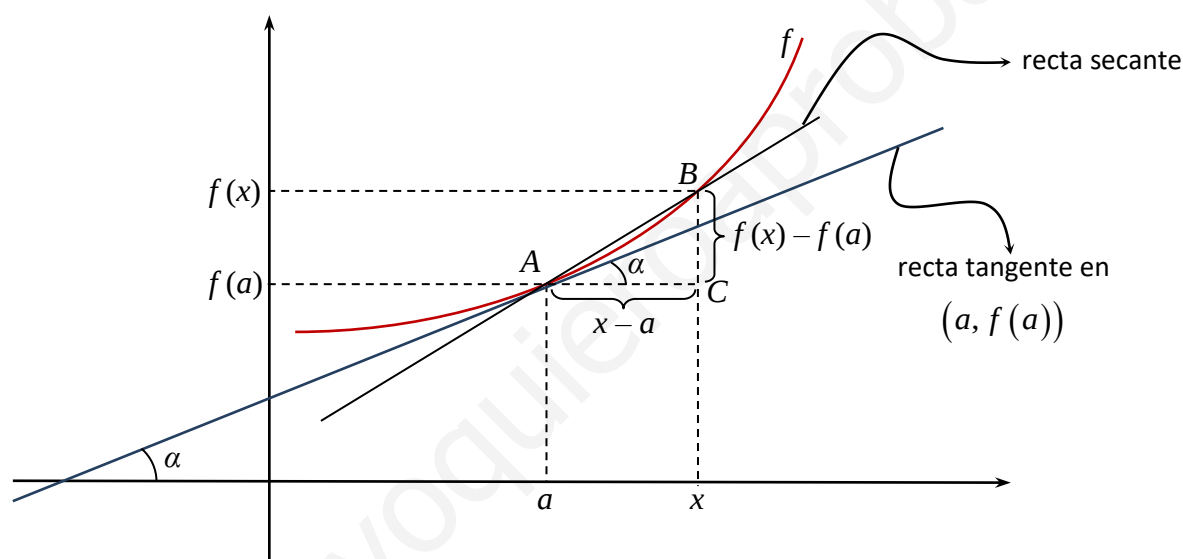
$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-x-1+3y+2z-2) - (z-1-2y+3x+3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv -4x+5y+z-5=0.$$

EJERCICIO 1

- a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.
- b) Encuentra el punto de la función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 30x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es mínima. Encuentra también el punto donde la pendiente es máxima.

Solución

- a) La derivada de una función f en un punto a es el límite del cociente $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ cuando $x \rightarrow a$, caso de existir. Esto quiere decir que la derivada es la tangente trigonométrica del ángulo α que forma la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ con el eje OX , o lo que es lo mismo, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. Ver figura.



Como se puede observar, la recta secante que pasa por los puntos $(x, f(x))$, $(a, f(a))$ se convierte, en el paso al límite, cuando $x \rightarrow a$, en la recta tangente en el punto $(a, f(a))$. Por tanto cada cociente $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ pasa de ser la tangente trigonométrica del ángulo A del triángulo rectángulo ABC , a la tangente trigonométrica del ángulo α , que forma la recta tangente con el eje OX , es decir, la pendiente de la recta tangente.

- b) Como $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x + 30$, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en un punto genérico $x = t$ es $g(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 30$. Derivando esta función “pendiente” e igualando a cero obtenemos los posibles máximos o mínimos de la misma:

$$g'(t) = 12t^2 - 48t + 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases}. \text{ Volviendo a derivar la función } g: g''(t) = 24t - 48$$

Entonces:

- $g''(1) = 24 \cdot 1 - 48 = -24 < 0 \Rightarrow t = 1$ es un máximo de g , es decir, $x = 1$ es un punto de f de pendiente máxima.

Sustituyendo en la ecuación de f : $f(1) = 1^4 - 8 \cdot 1^3 + 18 \cdot 1^2 + 30 \cdot 1 + 1 = 1 - 8 + 18 + 30 + 1 = 42$.

Así, el punto donde la pendiente es máxima es $(1, 42)$.

- $g''(3) = 24 \cdot 3 - 48 = 24 > 0 \Rightarrow t = 3$ es un mínimo de g , es decir, $x = 3$ es un punto de f de pendiente mínima. Sustituyendo en la ecuación de f :

$$f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^3 + 18 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 + 1 = 81 - 216 + 162 + 90 + 1 = 118.$$

Así, el punto donde la pendiente es mínima es $(3, 118)$.

EJERCICIO 2

Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

tal que $F(0) = 5$.

Solución

Hemos de encontrar una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ y tal que $F(0) = 5$. Hallemos en primer lugar la integral indefinida de f y luego imponemos la condición.

Para calcular la integral procederemos por el método de integración por partes:

$$\int (x^2 + 1)e^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2 + 1 & dv = e^x dx \\ du = 2x dx & v = e^x \end{array} \right] = (x^2 + 1)e^x + \int 2xe^x dx = (x^2 + 1)e^x - 2 \int xe^x dx = (*)$$

Volviendo a integrar por partes se tiene:

$$(*) = (x^2 + 1)e^x - 2 \int xe^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right] = (x^2 + 1)e^x - 2 \left(xe^x - \int e^x dx \right) =$$

$$= (x^2 + 1)e^x - 2(xe^x - e^x) + C = (x^2 + 1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 3)e^x + C.$$

Entonces una primitiva de f es la función $F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x + C$.

Como $F(0) = 5$, entonces $F(0) = (0^2 - 2 \cdot 0 + 3)e^0 + C = 5 \Rightarrow 3 + C = 5 \Rightarrow C = 2$.

Así pues, la función que se pide es $F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x + 2$.

EJERCICIO 3

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$$

se pide:

- Calcula $A \cdot A^t$ donde A^t es la matriz traspuesta de A .
- Razona que siempre existe la matriz inversa de A , independientemente de los valores $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$.

Solución

$$a) \quad A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}.$$

b) Sabemos que una matriz cuadrada tiene inversa si, y solamente si, su determinante es distinto de cero.

Utilizando el apartado anterior:

$$|A \cdot A^t| = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow |A| \cdot |A^t| = (a^2+b^2)^4 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |A|^2 = (a^2+b^2)^4 \Leftrightarrow |A| = (a^2+b^2)^2$$

En el paso (1) se ha utilizado que el determinante de una matriz cuadrada es igual que el de su traspuesta.

Como $a \neq 0, b \neq 0$, entonces $|A| = (a^2+b^2)^2 > 0$, lo que quiere decir que el determinante de la matriz A nunca se anula, es decir, siempre existe la matriz inversa de A , independientemente de los valores $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$.

EJERCICIO 4

Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$:

- a) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.
- b) Para el valor de λ obtenido en el apartado anterior, obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta r paralela a π_1 y a π_2 que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$.

Solución

- a) Para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares, basta que lo sean sus vectores normales. Un vector normal de π_1 es $\vec{v}_1 = (1, -2, -1)$ y un vector normal de π_2 es $\vec{v}_2 = (2, -1, \lambda)$.

$$\text{Por tanto: } \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Leftrightarrow (1, -2, -1) \cdot (2, -1, \lambda) = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

- b) Una recta r paralela a π_1 y a π_2 deberá tener dirección perpendicular, simultáneamente, a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Esta dirección $\vec{u}$ se obtiene haciendo el producto vectorial de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$:

$$\vec{u} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-8i - 2j - k) - (-4k + 4j + i) = -9i - 6j + 3k \Rightarrow \vec{u} = (-9, -6, 3).$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta r paralela a π_1 y a π_2 que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - 9k \\ y = 2 - 6k \\ z = 3 + 3k \end{cases}$$

Ver figura de la página siguiente.

