EJERCICIO 1

Dada la función $f(x)=\dfrac{4x^2+3x+4}{2x}$, se pide:

a) Calcula las asíntotas verticales y oblicuas de $f(x)$.

b) Coordenadas de los máximos y los mínimos relativos de $f(x)$.

Solución

a) Como la función es racional y el denominador se anula cuando $x=0$, estudiaremos el límite de la función cuando x tiende a cero:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+3x+4}{2x}=\left[\frac{4}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si} \quad x\to 0^- \\ +\infty & \text{si} \quad x\to 0^+\end{cases}\Rightarrow x=0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Veamos si hay alguna asíntota oblicua de la forma $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2+3x+4}{2x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+4}{2x^2}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3x+4}{2x}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+4}{2x}=\frac{3}{2}$$

Por tanto, la asíntota oblicua de la función es $y=2x+\dfrac{3}{2}$.

b) La derivada de f es $f'(x)=\dfrac{(8x+3)\cdot 2x-\left(4x^2+3x+4\right)\cdot 2}{(2x)^2}=\dfrac{8x^2-8}{4x^2}=\dfrac{2x^2-2}{x^2}$.

Igualemos la derivada a cero y extraigamos las soluciones.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-2}{x^2}=0\Leftrightarrow 2x^2-2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-1\end{cases}$$

Estos son los puntos singulares o críticos, “candidatos” a máximos o mínimos relativos. Haremos la derivada segunda de la función y evaluaremos los puntos singulares en la misma.

$$f''(x)=\frac{4x\cdot x^2-\left(2x^2-2\right)\cdot 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{4x}{x^4}=\frac{4}{x^3}$$

Entonces:

- $f''(-1)=\dfrac{4}{(-1)^3}=-4<0\Rightarrow x=-1$ es un máximo relativo.

  Como $f(-1)=\dfrac{4(-1)^2+3(-1)+4}{2(-1)}=\dfrac{4-3+4}{-2}=-\dfrac{5}{2}$, las coordenadas del máximo son $\left(-1,-\dfrac{5}{2}\right)$.

- $f''(1)=\dfrac{4}{1^3}=4>0\Rightarrow x=1$ es un mínimo relativo.

  Como $f(1)=\dfrac{4\cdot 1^2+3\cdot 1+4}{2\cdot 1}=\dfrac{4+3+4}{2}=\dfrac{11}{2}$, las coordenadas del mínimo son $\left(1,\dfrac{11}{2}\right)$.

EJERCICIO 2

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \left(\cos(2x) + \operatorname{sen} x \cos x\right) dx$.

b) $\int \frac{x^3 - 1}{x + 2} dx$.

Solución

a) $\int \left(\cos(2x) + \operatorname{sen} x \cos x\right) dx = \int \cos(2x)\, dx + \int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\cos(2x)\, dx + \frac{1}{2}\int 2 \operatorname{sen} x \cos x\, dx =$

$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$.

b) Realizando la división $\left(x^3 - 1\right) : (x + 2)$ se obtiene de cociente $x^2 - 2x + 4$ y de resto -9. Entonces:

$x^3 - 1 = (x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right) - 9 \Rightarrow \frac{x^3 - 1}{x + 2} = \frac{(x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right) - 9}{x + 2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{9}{x+2}$. Por tanto:

$$\int \frac{x^3 - 1}{x + 2} dx = \int \left(x^2 - 2x + 4 - \frac{9}{x+2}\right) dx = \int \left(x^2 - 2x + 4\right) dx - \int \frac{9}{x+2} dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 9\ln|x+2| + C.$$

EJERCICIO 3

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Resuelve el sistema matricial $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$.

b) Encuentra una fórmula general para B^n, donde $n \in \mathbb{N}$. (Indicación: Calcula las primeras potencias de la matriz B).

Solución

a) Si en el sistema $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$ multiplicamos la segunda ecuación por -2, se tiene $\begin{cases} 2X + 3Y = A \\ -2X - 2Y = -2B \end{cases}$.

Sumando ambas ecuaciones se obtiene que:

$$Y = A - 2B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

De la segunda ecuación del sistema $X + Y = B$ se deduce que $X = B - Y$. Sustituyendo tenemos:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) $B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$B^3 = B^2 \cdot B = I \cdot B = B$

$B^4 = B^3 \cdot B = B \cdot B = I$

$B^5 = B^4 \cdot B = I \cdot B = B$

Así podríamos seguir. Obsérvese que cuando el exponente es par el resultado es la matriz identidad I. Sin embargo, si el exponente es impar el resultado es la matriz B. La fórmula general sería pues:

$$B^n = \begin{cases} I & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ B & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}, \; n \in \mathbb{N}$$

EJERCICIO 4

Consideremos el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 1 - at \\ z = \quad 2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$.

a) Determina el parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la recta r y el plano π sean paralelos.

b) Para el valor de a determinado, obtén las ecuaciones de una recta r' paralela al plano π y que corte perpendicularmente a r en el punto $P(1,1,0)$.

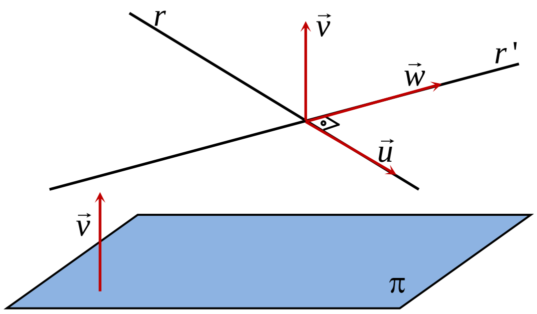
Solución

a) La recta r está dada en ecuaciones paramétricas. Un vector director suyo es $\vec{u} = (a, -a, 2)$. Un vector perpendicular al plano π es $\vec{v} = (1, 0, -1)$. Como r y π han de ser paralelos, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ serán perpendiculares, con lo que su producto escalar ha de ser cero: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (a, -a, 2) \cdot (1, 0, -1) = 0 \Leftrightarrow a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

b) Efectivamente $P(1,1,0) \in r$. Basta observar las ecuaciones paramétricas de r para darse cuenta de ello. El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector que tiene dirección perpendicular a ambos. En particular, tendrá dirección paralela al plano (pues $\vec{v}$ es perpendicular a π) y perpendicular a r. Es un vector director de la recta r' que se pide. Llamando $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (i, j, k)$ al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se tiene:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2i + 2j) - (-2k - 2j) =$$

$$= 2i + 4j + 2k \Rightarrow \vec{w} = (2, 4, 2).$$



Así pues, la ecuación de la recta r' será: $r' \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = \quad 2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$

.

EJERCICIO 1

En cierto experimento la cantidad de agua en estado líquido $C(t)$, medida en litros, está determinada en función del tiempo t, medido en horas, por la expresión:

$$C(t)=\frac{2}{3}+10t+\frac{10}{t}+\frac{240}{t^3},\qquad t\in[1,10]$$

Halla cuál es la cantidad mínima de agua en estado líquido y en qué instante de tiempo se obtiene, en el intervalo comprendido entre $t=1$ hora y $t=10$ horas.

Solución

La función $C(t)$ se puede expresar así: $C(t)=\frac{2}{3}+10t+10t^{-1}+240t^{-3}$. De esta forma se puede derivar con facilidad:

$$C'(t)=10+10(-1)t^{-2}+240(-3)t^{-4}=10-10t^{-2}-720t^{-4}=10-\frac{10}{t^2}-\frac{720}{t^4}.$$

La segunda derivada es:

$$C''(t)=-10(-2)t^{-3}-720(-4)t^{-5}=\frac{20}{t^3}+\frac{2880}{t^5}.$$

Resolviendo la ecuación $C'(t)=0$ obtenemos aquellos puntos singulares o críticos que pueden ser máximos o mínimos relativos de la función:

$$C'(t)=0\Leftrightarrow 10-\frac{10}{t^2}-\frac{720}{t^4}=0\Leftrightarrow 10t^4-10t^2-720=0\Leftrightarrow t^4-t^2-72=0\ .$$

Resolviendo la ecuación: $t^2=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-72)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{1+288}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{289}}{2}=\frac{1\pm17}{2}=\begin{cases}\frac{18}{2}=9\\ -\frac{16}{2}=-8\end{cases}$.

Si $t^2=-8$, no existe solución real para t. Si $t^2=9\Rightarrow\begin{cases}t_1=-3\\ t_2=3\end{cases}$. De estos dos valores, el único candidato a máximo o mínimo es $t_2=3$, pues es el que se encuentra en el intervalo comprendido entre $t=1$ hora y $t=10$ horas. Sustituyendo en la segunda derivada se tiene que $C''(t_2)=C(3)=\frac{20}{3^3}+\frac{2880}{3^5}>0\Rightarrow t_2=3$ es un mínimo.

Así pues, la cantidad mínima de agua en estado líquido se da en el instante $t=3$ horas. Dicha cantidad mínima será:

$$C(3)=\frac{2}{3}+10\cdot3+\frac{10}{3}+\frac{240}{3^3}=\frac{2}{3}+30+\frac{10}{3}+\frac{240}{27}=34+\frac{240}{27}=\frac{918+240}{27}=\frac{1158}{27}=\frac{386}{9}\simeq 44{,}89 \text{ litros.}$$

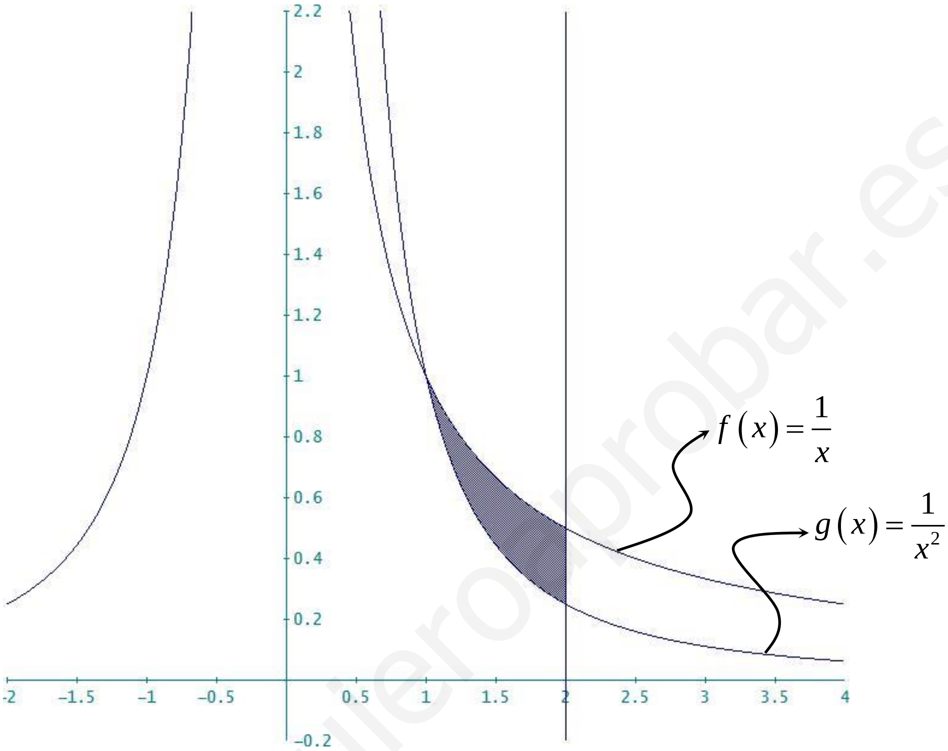
EJERCICIO 2

a) Representa gráficamente la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{x^2}$, y la recta $x=2$.

b) Calcula el área de dicha región.

Solución

a) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2=x \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$. Entonces las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el punto $x=1$ (el punto $x=0$ no pertenece al dominio de ninguna de las dos funciones). Gráficamente:



b) El área de la región sombreada es $\int_1^2 \left(f(x)-g(x)\right)$:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\ln x+\frac{1}{x}\right]_1^2=\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)-(\ln 1+1)=\ln 2-\frac{1}{2}\simeq 0{,}19 \text{ uds}^2$$

EJERCICIO 3

a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x+2y-z=\lambda \\ 3x-y-z=1 \\ 5x+y-2z=3 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda=2$.

Solución

a) Sea A la matriz de los coeficientes $A=\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es al menos 2, pues contiene un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=3-(-5)=-8$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 5 & 1 & -2\end{vmatrix}=(2\lambda-10-3)-(5-12-\lambda)=3\lambda-6$. Obsérvese pues que $|A|=0\Leftrightarrow 3\lambda-6=0\Leftrightarrow\lambda=2$. Por tanto:

- Si $\lambda\neq 2\Rightarrow \operatorname{rango}(A)=3$.
- Si $\lambda=2\Rightarrow \operatorname{rango}(A)=2$.

Estudiemos ahora el rango de la matriz ampliada $B=\begin{pmatrix}\lambda & 2 & -1 & \lambda\\ 3 & -1 & -1 & 1\\ 5 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

- Si $\lambda\neq 2\Rightarrow \operatorname{rango}(B)=3$, pues en este caso el rango de A ya era 3.
- Si $\lambda=2$, $\operatorname{rango}(B)=\operatorname{rango}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1 & 2\\ 3 & -1 & -1 & 1\\ 5 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}=2$, pues todos los menores de orden 3 deben ser igual a cero (obsérvese que la tercera fila es la suma de la primera y la segunda).

Resumiendo:

- Si $\lambda\neq 2\Rightarrow \operatorname{rango}(A)=\operatorname{rango}(B)=3=n$ (número de incógnitas). Entonces el sistema es compatible determinado (solución única).
- Si $\lambda=2\Rightarrow \operatorname{rango}(A)=\operatorname{rango}(B)=2<3=n$. En este caso el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Ya hemos visto que para $\lambda=2$ hay infinitas soluciones pues $\operatorname{rango}(A)=\operatorname{rango}(B)=2<3=n$. El grado de libertad del sistema, en este caso, es igual a 1. Llamando $z=t$ y eliminando la tercera ecuación tenemos el sistema equivalente $\begin{cases}2x+2y=2+t\\ 3x-y=1+t\end{cases}$, cuyas soluciones son:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2+t & 2\\ 1+t & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}}=\frac{(-2-t)-(2+2t)}{-2-6}=\frac{-4-3t}{-8}=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}t.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2+t\\ 3 & 1+t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}}=\frac{(2+2t)-(6+3t)}{-2-6}=\frac{-4-t}{-8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}t.$$

Por tanto, las soluciones del sistema son $(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}t,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{8}t,\ t\right)$, $t\in\mathbb{R}$.

EJERCICIO 4

Dados los puntos de coordenadas $A(0,1,0)$, $B(1,2,3)$, $C(0,2,1)$ y $D(k,1,1)$, donde $k\in\mathbb{R}$:

a) Determina el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) ¿Para qué valores del parámetro k el tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D tienen un volumen de $5\ \mathrm{u}^3$?

Solución

Área de un triángulo:

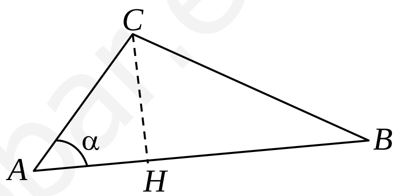
Sean tres puntos del espacio $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ y $C(c_1,c_2,c_3)$. Llamemos S al área del triángulo cuyos vértices son A, B y C, y $\vec{u}$ al vector $\vec{u}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\end{vmatrix}$. Entonces:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

Demostración.

El área del triángulo ABC es:

$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ (la última igualdad es la definición de módulo del producto vectorial de dos vectores).



a) Por el resultado anterior, llamando S al área del triángulo de vértices A, B y C:

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1-0 & 2-1 & 3-0\\ 0-0 & 2-1 & 1-0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|\left(\vec{i}+\vec{k}\right)-\left(\vec{j}+3\vec{i}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4+1+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}\simeq 1,225\text{ uds}^2$$

b) Recordemos que el volumen V de un tetraedro de vértices $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$ y $D(d_1,d_2,d_3)$ es igual a la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$, es decir:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3\end{matrix}\right\|$$

Como

$$\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3\\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1-0 & 2-1 & 3-0\\ 0-0 & 2-1 & 1-0\\ k-0 & 1-1 & 1-0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ k & 0 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|(1+k)-(3k)\right|=\frac{1}{6}\left|1-2k\right|,$$

se tiene que:

$$\frac{1}{6}\left|1-2k\right|=5\Leftrightarrow\left|1-2k\right|=30\Leftrightarrow\begin{cases}1-2k=30\Rightarrow 2k=-29\Rightarrow k=-\dfrac{29}{2}\\ 1-2k=-30\Rightarrow 2k=31\Rightarrow k=\dfrac{31}{2}\end{cases}.$$