

Resolver

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$(2^2)^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$2^x \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$2^x = t$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

$$t_2 = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

Por tanto,

Para $t_1 = 4$

$$2^x = 4$$

$$2^x = 2^2$$

$x = 2$ 1ª solución

Para $t_2 = 1$

$$2^x = 1$$

$$2^x = 2^0$$

$x = 0$ 2ª solución

Resolver

$$7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$$

$$7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$$

$$7^{2x} \cdot 7^3 - 8 \cdot 7^x \cdot 7 + 1 = 0$$

$$7^x \cdot 7^x \cdot 7^3 - 8 \cdot 7^x \cdot 7 + 1 = 0$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$7^x = t$$

$$343t^2 - 56t + 1 = 0$$

$$t = \frac{56 \pm \sqrt{3136 - 1372}}{686} = \frac{56 \pm \sqrt{1764}}{686} = \frac{56 \pm 42}{686}$$

$$t_1 = \frac{56 + 42}{686} = \frac{1}{7}$$

$$t_2 = \frac{56 - 42}{686} = \frac{1}{49}$$

Por tanto,

Para $t_1 = 1/7$

$$7^x = \frac{1}{7}$$

$$7^x = 7^{-1}$$

$x = -1$ 1ª solución

Para $t_2 = 1/49$

$$7^x = \frac{1}{49}$$

$$7^x = 7^{-2}$$

$x = -2$ es la 2ª solución

Resolver

$$2^{2x} + (-2)^{x+1} = 2^{x+1}$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$2^{2x} + (-2)^{x+1} = 2^{x+1}$$

$$2^{2x} + [(-1) \cdot (2)]^{x+1} = 2^{x+1}$$

$$2^{2x} + (-1)^{x+1} \cdot (2)^{x+1} = 2^{x+1}$$

$$2^{2x} + (-1)^{x+1} \cdot (2)^x \cdot 2 = 2^x \cdot 2$$

Hacemos el cambio de variable:

$$2^x = t$$

Luego:

$$t^2 + (-1)^{x+1} \cdot 2t = 2t$$

$$t^2 + (-1)^{x+1} \cdot 2t - 2t = 0 \text{ ecuación 1}$$

Veamos que valores puede tomar la expresión de abajo en función de que x sea par o impar:

$$C = (-1)^{x+1}$$

Si x es impar:

$$C = (-1)^{x+1} = (-1)^{1+1} = (-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

Sustituimos su valor en la ecuación 1:

$$t^2 + 1 \cdot 2t - 2t = 0$$

$$t^2 + 2t - 2t = 0$$

$$t^2 = 0$$

$$t = 0$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$2^x = t$$

$$2^x = 0; \text{solución no válida}$$

Si x es par:

$$C = (-1)^{x+1} = (-1)^{2+1} = (-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

Sustituimos su valor en la ecuación 1:

$$t^2 + (-1) \cdot 2t - 2t = 0$$

$$t^2 - 2t - 2t = 0$$

$$t^2 - 4t = 0$$

$$t(t - 4) = 0$$

$$t = 0; \text{ya hemos visto que no es válido}$$

$$t - 4 = 0$$

$$t = 4$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$2^x = 4$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2; \quad x \in \mathbb{N}$$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Problema 38:

Resolver la ecuación:

$$5^x + 5^{1-x} = 6$$

Solución Problema 38:

$$5^x + 5^{1-x} = 6$$

$$5^x + 5 \cdot 5^{-x} = 6$$

$$5^x + \frac{5}{5^x} - 6 = 0$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$5^x = t$$

Sustituyendo tenemos:

$$t + \frac{5}{t} - 6 = 0$$

$$t^2 + 5 - 6t = 0$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

$$t_1 = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

$$t_2 = \frac{6 - 4}{2} = 1$$

Para $t = 5$

$$5^x = t$$

$$5^x = 5^1$$

$$x = 1$$

Para $t = 1$

$$5^x = t$$

$$5^x = 1$$

$$5^x = 5^0$$

$$x = 0$$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Problema 39:

Resolver la ecuación:

$$9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$$

Solución Problema 39:

$$9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$$

$$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^2 + 81 = 0$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$3^x = t$$

Sustituyendo tenemos:

$$t^2 - 18t + 81 = 0$$

$$t = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 324}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Para $t = 9$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Problema 41:

Resolver la siguiente ecuación:

$$3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$$

Solución Problema 41:

$$3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$$

$$\frac{3^x}{3} + 3^x + 3^x \cdot 3 = 117$$

Hacemos el cambio de variable:

$$3^x = t$$

$$\frac{t}{3} + t + 3t = 117$$

$$t + 3t + 9t = 351$$

$$13t = 351$$

$$13t = 351$$

$$t = \frac{351}{13} = 27$$

Sustituyendo su valor,

$$3^x = t$$

$$3^x = 27$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$