

Resolver la ecuación:

$$4^{x-1} - 2^{x+2} = 128$$

$$4^{x-1} - 2^{x+2} = 128$$

$$(2^{x-1})^2 - 2^x \cdot 2^2 = 128$$

$$2^{2x-2} - 2^x \cdot 2^2 = 128$$

$$\frac{2^{2x}}{2^2} - 2^x \cdot 2^2 = 128$$

$$\frac{2^{2x}}{4} - 2^x \cdot 4 = 128$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$2^x = t$$

$$2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$$

Sustituyendo tenemos:

$$\frac{t^2}{4} - 4t = 128$$

$$t^2 - 16t = 512$$

$$t = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 2048}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{2304}}{2} = \frac{16 \pm 48}{2}$$

$$t_1 = \frac{16 + 48}{2} = 32$$

$$t_2 = \frac{16 - 48}{2} = -16 \text{ solución no válida}$$

$$2^x = 32$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$2^x = 2^4$$

$$2^x = t$$

$$x = 4$$

Resolver la ecuación:

$$4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$$

$$4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$$

$$(2^{x+1})^2 + 2^x \cdot 2^3 - 320 = 0$$

$$2^{2x+2} + 2^x \cdot 2^3 - 320 = 0$$

$$2^{2x} \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^3 - 320 = 0$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$2^x = t$$

$$2^{2x} = (2^x)^2 = t^2$$

Sustituyendo tenemos:

$$4t^2 + 8t - 320 = 0$$

Simplificando por 4:

$$t^2 + 2t - 80 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 320}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{-2 \pm 18}{2}$$

$$t_1 = \frac{-2 + 18}{2} = 8$$

$$t_2 = \frac{-2 - 18}{2} = -10 \text{ solución no válida}$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$2^x = t$$

$$2^x = 8$$

$$2^x = 2^3$$

$$x = 3$$

Resolver la ecuación:

$$8^x = \frac{2^{56} - 4^{26}}{30}$$

Solución Problema 46:

$$8^x = \frac{2^{56} - 4^{26}}{30}$$

$$8^x = \frac{2^{56} - (2^2)^{26}}{30} = \frac{2^{56} - 2^{52}}{30} = \frac{2^{52} \cdot (2^4 - 1)}{30} = \frac{2^{52} \cdot (16 - 1)}{30}$$

$$8^x = \frac{2^{52} \cdot 15}{2 \cdot 15} = \frac{2^{52}}{2}$$

$$8^x = 2^{51}$$

$$2^{3x} = 2^{51}$$

$$3x = 51$$

$$x = \frac{51}{3} = 17$$

Hallar el valor de x que resuelve la ecuación:

$$2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2(x-1)} + 2^{x-3} + 2^{2(x-2)} = 1984$$

La ecuación

$$2^{2x} + 2^{2x-1} + 2^{2(x-1)} + 2^{x-3} + 2^{2(x-2)} = 1984$$

Se puede expresar como:

$$2^{2x} + 2^{2x} \cdot \frac{1}{2} + 2^{2x} \cdot \frac{1}{2^2} + 2^x \cdot \frac{1}{2^3} + 2^{2x} \cdot \frac{1}{2^4} = 1984$$

Es, por tanto, una progresión geométrica de 5 términos. Hallamos su razón:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2^{2x-1}}{2^{2x}} = \frac{2^{2x} \cdot 2^{-1}}{2^{2x}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Calculamos su suma:

$$S_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r - 1}$$

$$S_5 = \frac{2^{2x-4} \cdot \frac{1}{2} - 2^{2x}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^{2x-4} \cdot 2^{-1} - 2^{2x}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^{2x-5} - 2^{2x}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^{2x-5} - 2^{2x}}{\frac{-1}{2}} =$$

$$= \frac{2^{2x} \cdot 2^{-5} - 2^{2x}}{\frac{-1}{2}} = \frac{2^{2x} \cdot (2^{-5} - 1)}{\frac{-1}{2}} = \frac{2^{2x} \cdot (\frac{1}{2^5} - 1)}{\frac{-1}{2}} = \frac{2^{2x} \cdot (\frac{1}{32} - 1)}{\frac{-1}{2}} =$$

$$= \frac{2^{2x} \cdot (\frac{-31}{32})}{\frac{-1}{2}} = \frac{2^{2x} \cdot (\frac{31}{32})}{\frac{1}{2}} = 2^{2x} \cdot 2 \cdot \left(\frac{31}{32}\right) = \frac{2^{2x} \cdot 31}{16}$$

Luego, la suma de los 5 términos la podemos expresar como:

$$S_5 = \frac{2^{2x} \cdot 31}{16}$$

Así:

$$\frac{2^{2x} \cdot 31}{16} = 1984$$

$$2^{2x} = \frac{1984 \cdot 16}{31} = 64 \cdot 16 = 2^6 \cdot 2^4 = 2^{10}$$

$$2^{2x} = \frac{1984 \cdot 16}{31} = 64 \cdot 16 = 2^6 \cdot 2^4 = 2^{10}$$

$$2^{2x} = 2^{10}$$

$$2x = 10$$

$$x = \frac{10}{2} = 5$$

Resolver la ecuación exponencial:

$$5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$$

$$5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$$

$$5^{2x-1} = (25^{x^2-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$5^{2x-1} = 25^{\frac{x^2}{3}-\frac{1}{12}}$$

$$5^{2x-1} = (5^2)^{\frac{x^2}{3}-\frac{1}{12}}$$

$$5^{2x-1} = 5^{\frac{2x^2}{3}-\frac{2}{12}}$$

$$5^{2x-1} = 5^{\frac{2x^2}{3}-\frac{1}{6}}$$

Tomando logaritmos en ambos miembros:

$$\log 5^{2x-1} = \log 5^{\frac{2x^2}{3}-\frac{1}{6}}$$

$$(2x-1) \cdot \log 5 = \left(\frac{2x^2}{3}-\frac{1}{6}\right) \cdot \log 5$$

Luego:

$$2x-1 = \frac{2x^2}{3}-\frac{1}{6}$$

$$12x-6 = 4x^2-1$$

$$4x^2-12x-1+6=0$$

$$4x^2-12x+5=0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144-80}}{8} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{12 \pm 8}{8}$$

$$x_1 = \frac{12+8}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \text{ solución válida}$$

$$x_1 = \frac{12-8}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ solución válida}$$

Hallar las soluciones de la ecuación:

$$3^{2x-1} - 3^{x+2} + 54 = 0$$

Con cuatro cifras decimales.

$$3^{2x-1} - 3^{x+2} + 54 = 0$$

$$\frac{3^{2x}}{3} - 3^x \cdot 3^2 + 54 = 0$$

$$\frac{(3^x)^2}{3} - 3^x \cdot 3^2 + 54 = 0$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$3^x = t$$

$$(3^x)^2 = t^2$$

Luego:

$$\frac{t^2}{3} - t \cdot 3^2 + 54 = 0$$

$$\frac{t^2}{3} - 9t + 54 = 0$$

$$t^2 - 27t + 162 = 0$$

$$t = \frac{27 \pm \sqrt{729 - 648}}{2} = \frac{27 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{27 \pm 9}{2}$$

$$t_1 = \frac{27 + 9}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$t_2 = \frac{27 - 9}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Para $t_1 = 18$

$$3^x = t$$

$$3^x = 18$$

$$3^x = 3^2 \cdot 2$$

Tomando logaritmos, y aplicando diversas propiedades de los logaritmos:

$$\log 3^x = \log(3^2 \cdot 2)$$

$$x \cdot \log 3 = \log 3^2 + \log 2$$

$$x \cdot \log 3 = \log 3^2 + \log 2$$

$$x \cdot \log 3 = 2 \cdot \log 3 + \log 2$$

$$x = \frac{2 \cdot \log 3 + \log 2}{\log 3} = \frac{2 \cdot \log 3}{\log 3} + \frac{\log 2}{\log 3} = 2 + \frac{\log 2}{\log 3} = 2 + \frac{0,3010}{0,4771} =$$

$$= 2 + 0,6308 = 2,6308$$

Luego:

$$x = 2,6308$$

Para $t_2 = 9$

$$3^x = t$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

Luego:

$$x = 2$$

Por tanto las soluciones son:

$$x = 2,6308$$

$$x = 2$$