

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1
- Junio, Ejercicio 2
- Reserva 1, Ejercicio 1
- Reserva 1, Ejercicio 2
- Reserva 2, Ejercicio 1
- Reserva 2, Ejercicio 2
- Reserva 3, Ejercicio 1
- Reserva 3, Ejercicio 2
- Reserva 4, Ejercicio 1
- Reserva 4, Ejercicio 2
- Julio, Ejercicio 1
- Julio, Ejercicio 2

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$

a) Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f(x))$.

MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

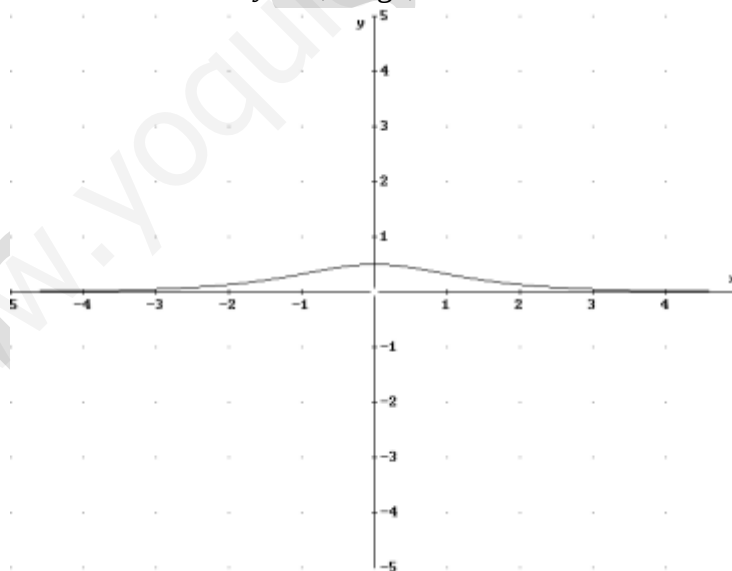
a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero

$$f'(x) = \frac{0 - (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x} - e^x}{(e^x + e^{-x})^2} = 0 \Rightarrow e^{-x} = e^x \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-
Función	C	D

Luego en el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ hay un máximo relativo y que también es máximo absoluto.

La función tiene una asíntota horizontal $y = 0$, luego, no tiene mínimo absoluto.



b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f(x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x + e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'Hopital} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x - e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'Hopital} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Sea la función $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$

a) Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$

b) Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos que nos dicen

$A = (-2, f(-2)) = (-2, 1)$ y $B = (2, f(2)) = (2, 9)$. Calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (4, 8)$. Luego, la pendiente de esta recta es: $m = \frac{8}{4} = 2$

La pendiente de la recta tangente a la función que nos dan es: $f'(x) = 3x^2 - 2$, igualando, tenemos que:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 = 2 \Rightarrow 3x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Luego, las abscisas de los puntos en que la recta tangente a la curva tiene de pendiente 2 son:

$$x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Calculamos el punto de inflexión

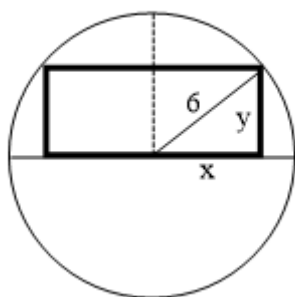
$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Ecuación de la recta tangente: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 5 = -2 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -2x + 5$

Ecuación de la recta normal: $y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)} \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 5$

Determina las longitudes de los lados de un rectángulo de área máxima que está inscrito en una semicircunferencia de 6 cm de radio, teniendo uno de sus lados sobre el diámetro de ella.
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máxima: $S_{\max} = 2x \cdot y$. Vemos que $0 \leq x \leq 6$ y que $0 \leq y \leq 6$

b) Relación entre las variables: $36 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$

$$S_{\max} = 2x \cdot y = 2x \cdot \sqrt{36 - x^2} = \sqrt{144x^2 - 4x^4}$$

c) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{\max} = \frac{288x - 16x^3}{2\sqrt{144x^2 - 4x^4}} = 0 \Rightarrow 288x - 16x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3\sqrt{2} \end{cases}$$

d) Comprobamos que $x = 3\sqrt{2}$ corresponde a un máximo en el intervalo $[0, 6]$

$$S'_{\max}(2) = \frac{288x - 16x^3}{2\sqrt{144x^2 - 4x^4}} = \frac{448}{2\sqrt{512}} = 9'89 > 0 \text{ Creciente}$$

$$S'_{\max}(5) = \frac{288x - 16x^3}{2\sqrt{144x^2 - 4x^4}} = \frac{-560}{2\sqrt{1100}} = -8'44 < 0 \text{ Decreciente}$$

Luego, las dimensiones del rectángulo son base $= 2x = 6\sqrt{2} \text{ cm}$; altura $= y = 3\sqrt{2} \text{ cm}$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{ax^2 - x + e^x - \cos(2x)} = -\frac{1}{7}$, calcula a ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano)

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{ax^2 - x + e^x - \cos(2x)} = \frac{0}{0} \text{ Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \ln(1+x)}{ax^2 - x + e^x - \cos(2x)} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \frac{1}{1+x}}{2ax - 1 + e^x + 2\sin(2x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) + \frac{1}{(1+x)^2}}{2a + e^x + 4\cos(2x)} = \\ &= \frac{1}{2a+1+4} = \frac{1}{2a+5} = -\frac{1}{7} \Rightarrow a = -6 \end{aligned}$$

Halla dos números mayores o iguales que 0, cuya suma sea 1, y el producto de uno de ellos por la raíz cuadrada del otro sea máximo.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea máximo: $P_{\max} = x \cdot \sqrt{y}$.

b) Relación entre las variables: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$P_{\max} = x \cdot \sqrt{1-x} = \sqrt{x^2 - x^3}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P'_{\max} = \frac{2x - 3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^2 - x^3}} = 0 \Rightarrow 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

e) Comprobamos que es un máximo

$$P'_{\max} \left(x = \frac{1}{2} \right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^3}} = 0'35 > 0 \Rightarrow \text{Creciente}$$

$$P'_{\max} \left(x = \frac{3}{4} \right) = \frac{2 \cdot \frac{3}{4} - 3 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{4} \right)^2 - \left(\frac{3}{4} \right)^3}} = -0'25 < 0 \Rightarrow \text{Decreciente}$$

Luego, los números son: $x = \frac{2}{3}$; $y = \frac{1}{3}$

Considera la función $f(x) = \frac{x^2 + a}{x - b}$, para $x \neq b$.

a) Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto $(1, -2)$ y tenga a la recta $y = x + 4$ como asíntota oblicua..

b) En el caso de $a = 5$ y $b = 4$, calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de f que pasa por el punto de abscisa $x = 0$

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Como f pasa por el punto $(1, -2)$ tenemos que $f(1) = -2 \Rightarrow \frac{1+a}{1-b} = -2 \Rightarrow a - 2b = -3$.

Como f tiene una asíntota oblicua con pendiente 1, tenemos que:

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + a}{x - b} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + a - x^2 + bx}{x - b} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a + bx}{x - b} \right) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{1} \right) = b = 4$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que: $a - 2b = -3 \Rightarrow a - 8 = -3 \Rightarrow a = 5$

Luego, los valores son: $a = 5$; $b = 4$

b) Si $a = 5$; $b = 4$, la función es: $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 4}$. La ecuación de la recta normal es:

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)} \cdot (x - 0)$$

$$f(0) = -\frac{5}{4}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-4) - (1) \cdot (x^2 + 5)}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x - 5}{(x-4)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{-5}{16}$$

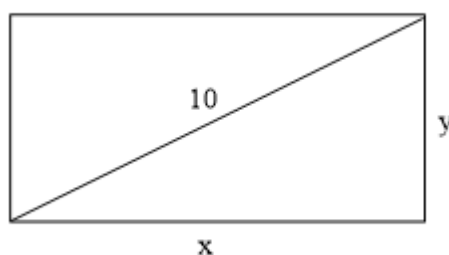
Sustituyendo, tenemos que:

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)} \cdot (x - 0) \Rightarrow y + \frac{5}{4} = -\frac{1}{-\frac{5}{16}} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \frac{16}{5}x - \frac{5}{4}$$

De entre todos los rectángulos de diagonal 10 cm (cada una), calcula las dimensiones del que tiene mayor área.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $100 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = x \cdot \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100x^2 - x^4}$$

d) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{\max} = \frac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{50} \end{cases}$$

e) Comprobamos que $x = \sqrt{50} \text{ cm}$ es un máximo

$$S'_{\max}(x=5) = \frac{200 \cdot 5 - 4 \cdot 5^3}{2\sqrt{100 \cdot 5^2 - 5^4}} = \frac{500}{86'6} > 0 \Rightarrow \text{El área es creciente antes de } x = \sqrt{50} \text{ cm}$$

$$S'_{\max}(x=8) = \frac{200 \cdot 8 - 4 \cdot 8^3}{2\sqrt{100 \cdot 8^2 - 8^4}} = -\frac{448}{96} < 0 \Rightarrow \text{El área es decreciente después de } x = \sqrt{50} \text{ cm}$$

Luego, es un cuadrado de lado $x = \sqrt{50} \text{ cm}$; $y = \sqrt{50} \text{ cm}$

Considera la función $f(x) = \frac{1}{x \cdot |x|}$, para $|x| \neq 0$.

a) Calcula los intervalos de concavidad y de convexidad de f , así como los puntos de inflexión de su gráfica, si existen.

b) Estudia y calcula las asíntotas de la función. Esboza su gráfica.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 2

RESOLUCIÓN

a) Lo primero que hacemos es abrir la función: $f(x) = \frac{1}{x \cdot |x|} = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calculamos la primera derivada: $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ -\frac{2}{x^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = \begin{cases} -\frac{6}{x^4} & \text{si } x < 0 \\ \frac{6}{x^4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Al igualar a cero, no sale ningún valor de x , por lo tanto, no tiene punto de inflexión.

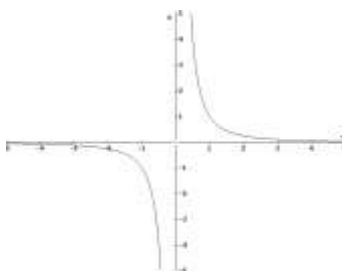
	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+
Función	Cn	Cx

Convexa en el intervalo: $(0, +\infty)$ y cóncava : $(-\infty, 0)$

b) Asíntota vertical: $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 0 \text{ es una asíntota vertical}$

Asíntota horizontal: $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{\infty} = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0^+ \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal}$

No tiene asíntota oblicua ya que tiene horizontal.



Sea $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{\ln(x+1)+a}{3x+4}$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

a) Determina a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 0$ es 1.

b) Para $a = 0$, estudia y calcula las asíntotas de f .

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada: $f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}(3x+4) - 3 \cdot [\ln(x+1)+a]}{(3x+4)^2}$

$$m = f'(0) = 1 \Rightarrow f'(0) = \frac{\frac{1}{0+1}(3 \cdot 0 + 4) - 3 \cdot [\ln(0+1)+a]}{(3 \cdot 0 + 4)^2} = 1 \Rightarrow \frac{4 - 3 \cdot a}{16} = 1 \Rightarrow a = -4$$

b) Asíntota vertical: $x = -\frac{4}{3}$. Pero no está en su dominio

Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{3x+4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{3} = 0 \Rightarrow y = 0$ es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

En una fábrica de pinturas, las latas que se utilizan para envasar la pintura tienen forma cilíndrica y una capacidad de 20 litros. Halla las dimensiones del cilindro, con tapas, para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea mínimo: $S_{\min} = 2\pi r h + 2\pi r^2$

b) Relación entre las variables: $20 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{20}{\pi r^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\min} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{20}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{40}{r} + 2\pi r^2$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\min} = -\frac{40}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} = 1'47 \text{ dm}$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo

$$S'_{\min}(r=1) = -\frac{40}{1^2} + 4\pi \cdot 1 = -27'43 < 0 \Rightarrow \text{Decreciente}$$

$$S'_{\min}(r=2) = -\frac{40}{2^2} + 4\pi \cdot 2 = 15'13 > 0 \Rightarrow \text{Creciente}$$

Luego, las dimensiones son: $r = 1'47 \text{ dm}$; $h = 2'94 \text{ dm}$

Sea la función $f : [-2, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \begin{cases} 5x+1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ e^x \cos(x) & \text{si } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$

a) Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$.

MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = \begin{cases} 5 \\ e^x(\cos x - \sin x) \end{cases} ; e^x(\cos x - \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x = 0 \Rightarrow \text{No} \\ \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

	$(-2, 0)$	$(0, \frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$	$(\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$
Signo $f'(x)$	+	+	-	+
Función	C	C	D	C

La función tiene un máximo relativo en $(\frac{\pi}{4}, 1'55)$ y un mínimo relativo en $(\frac{5\pi}{4}, -35'88)$.

Calculamos los valores que toma la función en sus extremos

$$f(-2) = -9$$

$$f(2\pi) = e^{2\pi} \cdot \cos 2\pi = e^{2\pi} = 535'49$$

Luego, el máximo absoluto es $(2\pi, 535'49)$ y el mínimo absoluto es $(\frac{5\pi}{4}, -35'88)$

b) La ecuación de la recta tangente es: $y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Calculamos: } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}\right) = -e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Sustituyendo, tenemos que: } y - 0 = -e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = x(\ln(x))^2$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

a) Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 1 \cdot (\ln x)^2 + 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x = (\ln x)^2 + 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x \cdot (\ln x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 = 1 \\ \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2} \end{cases}$$

	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

La función tiene un máximo relativo en $(e^{-2}, 4e^{-2})$ y un mínimo relativo en $(1, 0)$.

b) El mínimo absoluto está en el punto $(1, 0)$ y no tiene máximo absoluto