

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 6
- Reserva 1, Ejercicio 5
- Reserva 2, Ejercicio 6
- Reserva 3, Ejercicio 6
- Julio, Ejercicio 5
- Julio, Ejercicio 6

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$ donde $m \geq 0$

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A ?

b) Para $m=4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $A \cdot X = 12I$, donde I la matriz identidad de orden 3

MATEMÁTICAS II. 2022. JUNIO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, luego:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + m + m - m^2 - m - m^2 = 0 \Rightarrow m^3 - 2m^2 + m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \cdot (m^2 - 2m + 1) \Rightarrow m = 0 ; m = 1$$

Por lo tanto, la matriz A tendrá inversa para todos los valores de $m \neq 0$ y 1 .

b) Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}^t}{36} = \frac{\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}}{36} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz X .

$$A \cdot X = 12 \cdot I \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = 12 \cdot A^{-1} \cdot I \Rightarrow X = 12 \cdot A^{-1} = 12 \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1}

b) Calcula la matriz X de orden tres que verifica $AX + (A - X)^2 = X^2 + I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 1. EJERCICIO 5

RESOLUCIÓN

a)

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz X

$$\begin{aligned} AX + (A - X)^2 &= X^2 + I \Rightarrow AX + A^2 - AX - XA + X^2 = X^2 + I \Rightarrow \\ \Rightarrow A^2 - XA &= I \Rightarrow A \cdot A \cdot A^{-1} - X \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1} \Rightarrow A - X = A^{-1} \Rightarrow X = A - A^{-1} \end{aligned}$$

$$X = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dado $a \neq 0$, considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de a se cumple que $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A$.

b) Para $a = 1$ calcula, si es posible, la matriz X tal que $A \cdot X = B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B .

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 2 EJERCICIO 6.

RESOLUCIÓN

a) Calculamos A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -a \\ -3 & -a \end{pmatrix}^t}{-4a} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -a & -a \end{pmatrix}}{-4a}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot A \Rightarrow \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -a & -a \end{pmatrix}}{-4a} = \frac{\begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix}}{4} \Rightarrow \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -a & -a \end{pmatrix}}{-a} = \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & \frac{3}{a} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 3 \\ a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1$$

b) Calculamos la matriz X

$$A \cdot X = B^t \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B^t \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B^t$$

Luego:

$$X = A^{-1} \cdot B^t = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -9 & -5 \\ 0 & -7 & -3 \end{pmatrix}}{-4} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula el rango de la matriz A dependiendo de los valores m .

b) Para $m = 0$, resuelve la ecuación $A \cdot X = B$, si es posible.

MATEMÁTICAS II. 2022. RESERVA 3. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A y los igualamos a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = 3m^2 + 2 + 3m - 3m - 3 - 2m^2 = m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = 1; m = -1$$

Calculamos el rango de A para los distintos valores:

$$m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$m = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

	R(A)
$m = 1$	2
$m = -1$	2
$m \neq 1 \text{ y } -1$	3

b) Calculamos la matriz inversa de A para $m = 0$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial.

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa.

b) Para $a = 1$, calcula X tal que $AXB = C$, si es posible

MATEMÁTICAS II. 2022. JULIO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz B no tiene inversa si su determinante es cero, luego:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 4a - 2a^2 - 2 = 0 \Rightarrow -2a^2 + 4a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto, la matriz B no tiene inversa para $a = 0$ y $a = 2$.

b) Calculamos la matriz X

$$A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa de A y de B .

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{(B^{adj})^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X .

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$

a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$. b) Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2022. JULIO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Paso 1}} = 2 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ p & r & q \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Paso 2}} = (-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Paso 2}} = (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot (-2) = 12$$

Paso1: Si un número multiplica a una fila o columna de un determinante, dicho número sale multiplicando al determinante.

Paso 2: Si cambiamos dos filas o dos columnas de orden, el determinante cambia de signo

b)

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Paso 3}} = \begin{vmatrix} x & a & -2a \\ y & b & -2b \\ z & c & -2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Paso 4}} = \begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Paso 1}} = (-3) \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Paso 2}} = 6 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Paso 5}} = -6 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-2) = 12$$

Paso 3: Si una fila o columna de un determinante está formada por dos sumandos, el determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes.

Paso 4: Si un determinante tiene dos filas o dos columnas proporcionales, el determinante vale cero

Paso 5: El determinante de una matriz y el determinante de su matriz traspuesta valen lo mismo