

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 6
- Reserva 1, Ejercicio 6
- Reserva 2, Ejercicio 5
- Reserva 3, Ejercicio 5
- Reserva 4, Ejercicio 5
- Julio, Ejercicio 5

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Determina para qué valores de m existe la inversa de la matriz A .
b) Para todo $m \neq -1$, resuelve, si es posible, la ecuación $A \cdot X + X = B$

MATEMÁTICAS II. 2023. JUNIO. EJERCICIO 6

RESOLUCIÓN

a) La matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, luego:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} = m^3 = 0 \Rightarrow m = 0$$

Por lo tanto, la matriz A tendrá inversa para todos los valores de $m \neq 0$.

b) Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz X .

$$A \cdot X + X = B \Rightarrow (A + I) \cdot X = B \Rightarrow (A + I)^{-1} \cdot (A + I) \cdot X = (A + I)^{-1} B \Rightarrow X = (A + I)^{-1} B$$

Calculamos la matriz $A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos su inversa

$$(A + I)^{-1} = \frac{((A + I)^{adj})^t}{|A + I|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m^2 & 1 & -m \\ -m & m^2 & 1 \end{pmatrix}^t}{m^3 + 1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}}{m^3 + 1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{m^3 + 1} & \frac{m^2}{m^3 + 1} & -\frac{m}{m^3 + 1} \\ -\frac{m}{m^3 + 1} & \frac{1}{m^3 + 1} & \frac{m^2}{m^3 + 1} \\ \frac{m^2}{m^3 + 1} & -\frac{m}{m^3 + 1} & \frac{1}{m^3 + 1} \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X .

$$X = (A + I)^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{1}{m^3 + 1} & \frac{m^2}{m^3 + 1} & -\frac{m}{m^3 + 1} \\ -\frac{m}{m^3 + 1} & \frac{1}{m^3 + 1} & \frac{m^2}{m^3 + 1} \\ \frac{m^2}{m^3 + 1} & -\frac{m}{m^3 + 1} & \frac{1}{m^3 + 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m^3 + 1} & -\frac{m}{m^3 + 1} & \frac{m^2}{m^3 + 1} \\ -\frac{m}{m^3 + 1} & \frac{m^2}{m^3 + 1} & \frac{1}{m^3 + 1} \\ \frac{m^2}{m^3 + 1} & \frac{1}{m^3 + 1} & -\frac{m}{m^3 + 1} \end{pmatrix}$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de m para los que la matriz A tenga inversa.

b) Calcula para $m = 1$, si es posible, la matriz X tal que $A \cdot X = B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B .

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 1. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3m & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12m^2 - 12m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{6}$$

Luego, tiene inversa para los valores de $m \neq \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{6}$

b) Calculamos la inversa de A para $m = 1$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & -1 & -7 \\ -4 & -1 & -6 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & -6 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X : $A \cdot X = B^t \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B^t$

Calculamos la matriz X .

$$X = A^{-1} \cdot B^t = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 37 \\ 2 & 3 & 9 \\ 8 & 20 & 53 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{10}

b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de $I + A + A^2$, donde I denota la matriz identidad de orden 3

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 2. EJERCICIO 5

RESOLUCIÓN

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego: $A^{10} = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b)

$$B = I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & ab-b \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{(B^{adj})^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ b & -b & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -a & b \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & b \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula m para que la matriz A tenga inversa.

b) Para $m = 0$, resuelve, si es posible, la ecuación matricial $\frac{1}{2}A \cdot X + C^4 = B$

MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 3. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz A tiene inversa si su determinante es distinto de cero, luego:

$$|A| = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = 4m - 4 = 0 \Rightarrow m = 1$$

Por lo tanto, la matriz A tendrá inversa para todos los valores de $m \neq 1$.

b) Resolvemos la ecuación matricial y calculamos la matriz X .

$$\frac{1}{2}A \cdot X + C^4 = B \Rightarrow A \cdot X = 2(B - C^4) \Rightarrow X = 2A^{-1} \cdot (B - C^4)$$

Calculamos la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}^t}{-4} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos C^4 : $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow C^4 = I \cdot I = I$

Calculamos la matriz X .

$$X = 2A^{-1} \cdot (B - C^4) =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible, la

matriz X que verifica la ecuación $3X - B^t = AX$, siendo B^t la matriz traspuesta de B
MATEMÁTICAS II. 2023. RESERVA 4. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X : $3X - B^t = AX \Rightarrow 3X - AX = B^t \Rightarrow (3I - A)X = B^t \Rightarrow X = (3I - A)^{-1} \cdot B^t$

Calculamos la matriz

$$C = 3I - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa

$$C^{-1} = \frac{(C^{adj})^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 12 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X

$$X = (3I - A)^{-1} \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -11 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) Halla los valores de m para que la matriz $A - mI$ no tenga inversa.

b) Halla x , distinto de cero, para que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$

MATEMÁTICAS II. 2023. JULIO. EJERCICIO 5

RESOLUCIÓN

a) Calculamos la matriz $A - mI = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante

$$|A - mI| = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = 3$$

Luego, la matriz $A - mI$ no tiene inversa para $m = 0$ y $m = 3$, ya que su determinante vale 0.

b) Calculamos la inversa de la matriz $B = \frac{1}{x}(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & 0 & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos su inversa

$$B^{-1} = \frac{(B^{adj})^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}^t}{\frac{2}{x^3}} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2} & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}}{\frac{2}{x^3}} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

$$A - xI = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{x}{2} \\ 1 = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 2$$