

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio B3
- Junio, Ejercicio B4
- Reserva 1, Ejercicio B3
- Reserva 1, Ejercicio B4
- Reserva 2, Ejercicio B3
- Reserva 2, Ejercicio B4
- Reserva 3, Ejercicio B3
- Reserva 3, Ejercicio B4
- Reserva 4, Ejercicio B3
- Reserva 4, Ejercicio B4
- Julio, Ejercicio B3
- Julio, Ejercicio B4

a) Se considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con a , b y c números reales. Calcule los valores a , b y c , sabiendo que la gráfica de f posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(0,18)$ es -3 .

b) Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ y el eje de abscisas.

SOCIALES II. 2022 JUNIO. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

- Extremo relativo en $x = 3 \Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + b = 0 \Rightarrow 6a + b = -27$

- Pasa por $(0,18) \Rightarrow f(0) = 18 \Rightarrow c = 18$

- Tangente en ese punto pendiente $-3 \Rightarrow f'(0) = -3 \Rightarrow b = -3$

Sustituyendo en la primera ecuación, tenemos que: $6a + b = -27 \Rightarrow 6a - 3 = -27 \Rightarrow a = -4$

Luego: $a = -4$; $b = -3$; $c = 18$

b) Calculamos los puntos de corte de la función $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$ con el eje X, es decir, resolvemos la ecuación $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$ por Ruffini y sale: $x = 3$; $x = 3$; $x = -2$

Calculamos el área

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^3 (x^3 - 4x^2 - 3x + 18) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 18x \right]_{-2}^3 = \\ &= \left[\frac{3^4}{4} - 4\frac{3^3}{3} - 3\frac{3^2}{2} + 18 \cdot 3 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 4\frac{(-2)^3}{3} - 3\frac{(-2)^2}{2} + 18 \cdot (-2) \right] = \\ &= \left[\frac{81}{4} - \frac{108}{3} - \frac{27}{2} + 54 \right] - \left[\frac{16}{4} + \frac{32}{3} - \frac{12}{2} - 36 \right] = \frac{99}{4} - \left(-\frac{82}{3} \right) = \frac{625}{12} u^2 \end{aligned}$$

a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 6x - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

con a y b números reales. Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todo su dominio.

b) Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje OX y la gráfica de la función $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

SOCIALES II. 2022 JUNIO. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad y derivabilidad en $x=1$.

$$f(1) = 6 \cdot 1 - 3 = 3$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (6x - 3) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + bx + 2) &= a + b + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = 1 \text{ Por ser continua}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 6 & \text{si } x \leq 1 \\ 2ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y como es derivable

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 6 \\ f'(1^+) &= 2a + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a + b = 6$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones: $\left. \begin{aligned} a + b &= 1 \\ 2a + b &= 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 5 ; b = -4$

b) Calculamos los puntos de corte de la función con el eje OX:

$$-2x^2 + 8x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-4} = \frac{-8 \pm 4}{-4} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Calculamos el área

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6) dx = \left[-2 \frac{x^3}{3} + 8 \frac{x^2}{2} - 6x \right]_1^3 = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x \right]_1^3 = \\ &= \left[-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 \right] - \left[-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 \right] = [-18 + 36 - 18] - \left[-\frac{2}{3} + 4 - 6 \right] = \frac{8}{3} u^2 \end{aligned}$$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} a(x+1)^2 & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ \frac{bx^2}{2} + 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ con a y b números reales.

a) Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable.

b) Para $a=1$ y $b=2$, esboce la gráfica de la función f y calcule el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x=-2$ y $x=1$.

SOCIALES II. 2022 RESERVA 1. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Las funciones $a(x+1)^2$ y $\frac{bx^2}{2} + 2$, por ser polinomios, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, debemos estudiar la continuidad y derivabilidad en $x=1$.

Para que sea continua en $x=1$ se tiene que cumplir:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} a(x+1)^2 &= 4a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{bx^2}{2} + 2 \right) &= \frac{b}{2} + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a = \frac{b}{2} + 2$$

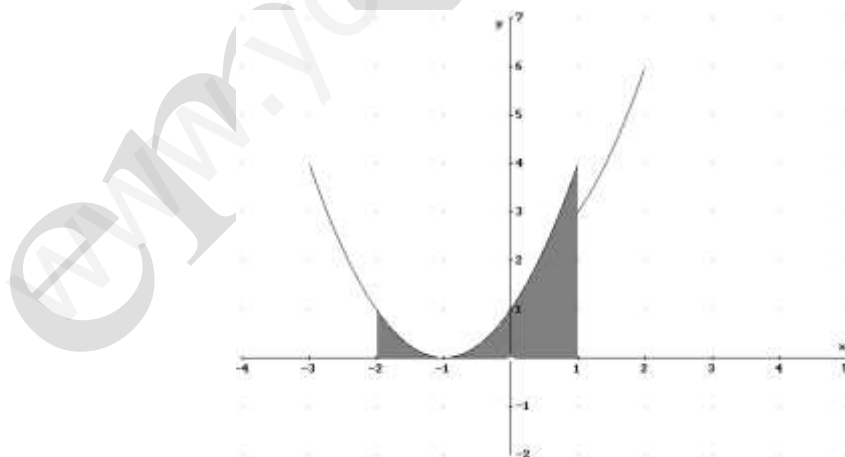
Calculamos la derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2a(x+1) & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ bx & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Para que sea derivable en $x=1$ se tiene que cumplir: $f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow 4a = b$

Resolviendo el sistema tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} 4a &= \frac{b}{2} + 2 \\ 4a &= b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1; b = 4$$

b) Representamos la función



Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_{-2}^1 (x+1)^2 dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_{-2}^1 = \left(\frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{1}{3} \right) = 3 \text{ u}^2$$

Se considera la función $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

- a) Determine el dominio de la función y estudie su monotonía y curvatura.
b) Calcule las ecuaciones de las asíntotas de f si existen. Calcule los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas.
c) Represente la gráfica de la función f .
- SOCIALES II. 2022. RESERVA 1. EJERCICIO B4**

R E S O L U C I Ó N

a) Su dominio es $\mathbb{R} - \{-2\}$. Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - 1 \cdot (x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow \text{No}$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	+
Función	C	C

La función es creciente en su dominio.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = -\frac{10}{(x+2)^3} = 0 \Rightarrow \text{No}$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
Signo $f''(x)$	+	-
Función	Cx	Cn

La función es convexa en $(-\infty, -2)$ y cóncava en $(-2, \infty)$.

b) La recta $x = -2$ es una asíntota vertical, ya que:

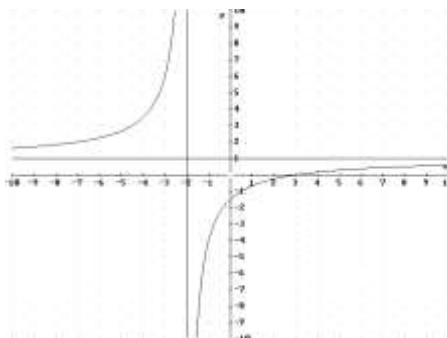
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-3}{x+2} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-3}{x+2} = -\infty \end{cases}$$

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal, ya que: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x+2} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$

Corte con el eje X $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x+2} = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \text{Punto } (3, 0)$

Corte con el eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{-3}{2} \Rightarrow \text{Punto } \left(0, -\frac{3}{2}\right)$

c) Representamos la función



Los ingresos (I) y costes (C) de una discoteca, en miles de euros, en función del número de horas diarias que permanece abierta, vienen dado por las funciones:
 $I(x) = x^3 - x$; $C(x) = x^3 - x^2 + 6$.

Respectivamente. Sabiendo que la licencia del ayuntamiento no permite que este tipo de local permanezca abierto más de 8 horas diarias, halle:

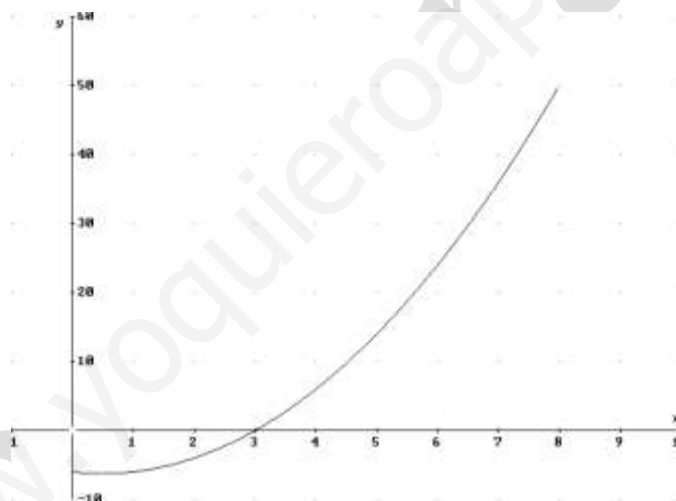
- La función beneficio en función del número de horas diarias que la discoteca permanece abierta.
- El número de horas que debe permanecer abierta para obtener beneficios.
- En qué momento se tienen las mayores pérdidas y a cuánto ascienden.
- El tiempo que debe permanecer abierta para obtener el máximo beneficio y a cuánto asciende.

SOCIALES II. 2022 RESERVA 2. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) La función beneficio es: $B(x) = I(x) - C(x) = x^3 - x - (x^3 - x^2 + 6) = x^2 - x - 6$

b) Representamos la parábola en el intervalo $[0, 8]$



Luego, para obtener beneficios debe estar abierta como mínimo 3 horas.

c) Calculamos la derivada: $B'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Luego, el momento de mayores pérdidas es cuando $x = \frac{1}{2}$ hora. Las pérdidas en ese momento son:

$$B(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{25}{4} \Rightarrow -6.250 \text{ €}$$

d) El máximo beneficio se obtiene para $x = 8$ horas y el máximo beneficio es:

$$B(x) = (8)^2 - 8 - 6 = 50 \Rightarrow 50.000 \text{ €}$$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ con a y b números reales

- a) Calcule a y b para que la función f sea continua y derivable
b) Para $a = -1$ y $b = 1$, realice un esbozo de la gráfica de la función f .
c) Para $a = -1$ y $b = 1$, halle el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f , la recta $x = 1$ y el eje OX.

SOCIALES II. 2022. RESERVA 2. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

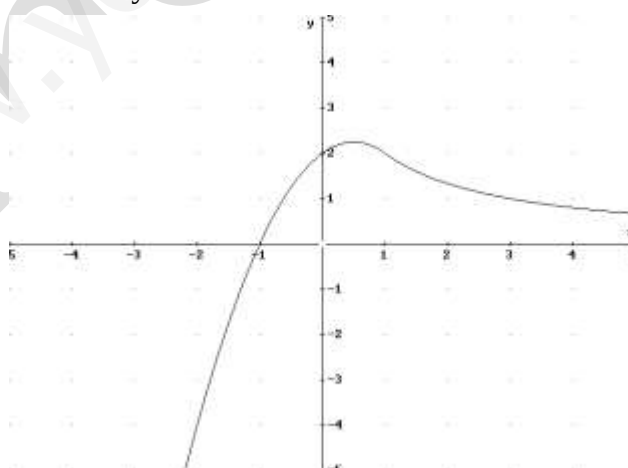
a) Para que sea continua en $x=1 \Rightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx + 2) &= a + b + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{4}{x+1} \right) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b + 2 = 2 \Rightarrow a + b = 0$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 1 \\ -\frac{4}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Para que sea derivable en $x=1 \Rightarrow \left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 2a + b \\ f'(1^+) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a + b = -1$

Luego, resolviendo el sistema, tenemos que: $\left. \begin{aligned} a + b &= 0 \\ 2a + b &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -1 ; b = 1$

b) Hacemos la gráfica para $a = -1$ y $b = 1$



c) Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_{-1}^1 (-x^2 + x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{13}{6} - \left(-\frac{7}{6} \right) = \frac{10}{3} u^2$$

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 16x + 17 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{3}(10 - 5x) & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f .

b) Represente gráficamente la función f .

c) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas entre $x = -2$ y $x = 2$

SOCIALES II. 2022 RESERVA 3 EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) La función $4x^2 + 16x + 17$ es continua y derivable en su dominio. La función $\frac{1}{3}(10 - 5x)$ es continua y derivable en su dominio. La función $\frac{3}{2}$ es continua y derivable en su dominio. Por lo tanto, sólo tenemos que estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = -1$ y $x = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} (4x^2 + 16x + 17) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{3}(10 - 5x) \right) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 5 \Rightarrow \text{Es continua en } x = -1$$

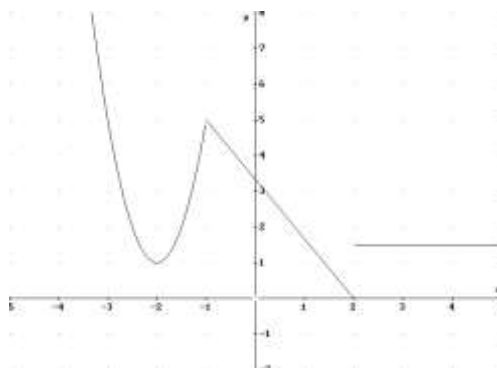
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{3}(10 - 5x) \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \text{No es continua ni derivable en } x = 2$$

Calculamos la derivada: $f'(x) = \begin{cases} 8x + 16 & \text{si } x < -1 \\ -\frac{5}{3} & \text{si } -1 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-1^-) = 8 \\ f'(-1^+) = -\frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow f'(-1^-) \neq f'(-1^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x = -1$$

Luego, la función es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-1 \text{ y } 2\}$

b) Representamos la función:



c) Calculamos el área que nos piden

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^{-1} (4x^2 + 16x + 17) dx + \int_{-1}^3 \frac{1}{3}(10 - 5x) dx = \left[\frac{4x^3}{3} + 8x^2 + 17x \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{3} \left(10x - \frac{5x^2}{2} \right) \right]_{-1}^3 = \\
 &= \left(-\frac{4}{3} + 8 - 17 \right) - \left(-\frac{32}{3} + 32 - 34 \right) + \left(\frac{1}{3}(20 - 10) \right) - \left(\frac{1}{3} \left(-10 - \frac{5}{2} \right) \right) = \\
 &= \left(-\frac{31}{3} \right) - \left(-\frac{38}{3} \right) + \left(\frac{10}{3} \right) - \left(-\frac{25}{6} \right) = \frac{59}{6} u^2
 \end{aligned}$$

Se considera la función $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 5$

a) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a f que sean paralelas a la recta $y = -3x + 1$

b) Calcule la función F que verifique $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 4$

SOCIALES II. 2022 RESERVA 3 EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

a) Como tiene que ser paralela a la recta $y = -3x + 1$, la pendiente vale -3 , luego: $f'(x) = -3$

$$f'(x) = -3 \Rightarrow 9x^2 - 12x = -3 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1; x = \frac{1}{3}$$

La ecuación de la tangente en $x = 1$ es: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$f(1) = 3 - 6 + 5 = 2$$

$$f'(1) = -3$$

Sustituyendo, tenemos que: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 2 = -3 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -3x + 5$

La ecuación de la tangente en $x = \frac{1}{3}$ es: $y - f\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{40}{9}$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = -3$$

Sustituyendo, tenemos que: $y - f\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow y - \frac{40}{9} = -3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow y = -3x + \frac{49}{9}$

b) Calculamos la integral

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (3x^3 - 6x^2 + 5) dx = \frac{3x^4}{4} - 2x^3 + 5x + C$$

Como sabemos que: $F(2) = 4 \Rightarrow \frac{3 \cdot 2^4}{4} - 2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2 + C = 4 \Rightarrow C = -2$

Luego, la función que nos piden es: $F(x) = \frac{3x^4}{4} - 2x^3 + 5x - 2$

Una empresa de fumigación sabe que los beneficios, en miles de euros, que obtiene en función de las hectáreas que le encargan fumigar mensualmente viene dada por la expresión

$$B(x) = -x^2 + 16x - 48$$

Además, por problemas de personal, la empresa no puede fumigar más de 10 hectáreas al mes.

- ¿Cuántas hectáreas tiene que fumigar al mes para que la empresa tenga beneficios?
 - ¿Cuántas hectáreas tiene que fumigar para obtener el máximo beneficio mensual? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?.
 - Si un mes ha obtenido un beneficio de 7000 €, ¿cuántas hectáreas ha fumigado?
- SOCIALES II. 2022 RESERVA 4. EJERCICIO B3**

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte con el eje OX

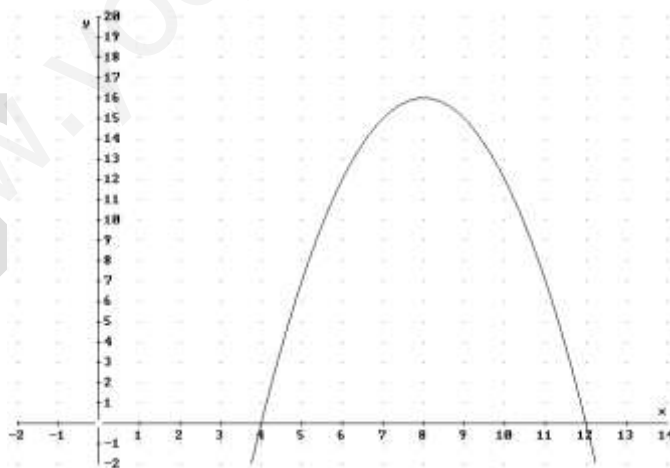
$$-x^2 + 16x - 48 = 0 \Rightarrow x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 - 192}}{-2} = \frac{-16 \pm 8}{-2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 12 \end{cases}$$

Luego, tiene beneficios cuando fumiga más de 4 hectáreas.

b) Calculamos el vértice de la parábola: $x_{\text{vértice}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-16}{-2} = 8$

Luego, el vértice es el punto: (8,16). Por lo tanto, para obtener el máximo beneficio mensual debe fumigar 8 hectáreas y el beneficio máximo será de 16.000 €

Hacemos el dibujo de la función



c)

$$-x^2 + 16x - 48 = 7 \Rightarrow x^2 - 16x + 55 = 0 \Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 220}}{2} = \frac{16 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = 11 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Luego, ha fumigado 5 hectáreas. El valor 11 no sirve ya que la empresa no puede fumigar más de 10 hectáreas al mes.

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$, con a y b números reales.

a) ¿Para qué valores de a y b la función es continua y derivable en $x = 1$?

b) Para $a = -3$ y $b = 4$, calcule los extremos relativos de f .

c) Para $a = -2$ y $b = 3$, calcule el valor de la integral $\int_{-1}^3 f(x) dx$

SOCIALES II. 2022. RESERVA 4. EJERCICIO B4

R E S O L U C I Ó N

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx + 1) &= a + b + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{x}\right) &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b + 1 = 2 \Rightarrow a + b = 1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Por ser derivable en $x = 1 \Rightarrow \left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 2a + b \\ f'(1^+) &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a + b = -2$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $\left. \begin{aligned} a + b &= 1 \\ 2a + b &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -3; b = 4$

b) Calculamos la función derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = \begin{cases} -6x + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Igualamos la derivada a cero: $-6x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, 1\right)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	-
Función	C	D	D

La función es creciente en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$. Decreciente en $\left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$. Tiene un máximo en $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$

c) Calculamos la integral que nos piden

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 3x + 1) dx + \int_1^3 \left(\frac{2}{x}\right) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x\right]_{-1}^1 + [2 \ln|x|]_1^3 = \\ &= \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 1\right) - \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1\right) + (2 \ln|3|) - (2 \ln|1|) = \frac{11}{6} - \frac{7}{6} + 2 \ln 3 = \frac{2}{3} + 2 \ln 3 \end{aligned}$$

a) Se considera la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx - 1$ donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo relativo en el punto de abscisa $x = \frac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto $(-2, -3)$.

a) Dada la función $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$, realice un esbozo de su gráfica estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

SOCIALES II. 2022. JULIO. EJERCICIO B3

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$$\text{Extremo relativo en } x = \frac{1}{3} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2b \cdot \frac{1}{3} + c = 0 \Rightarrow \frac{2b}{3} + c = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Pasa por } (-2, -3) \Rightarrow f(-2) = -3 \Rightarrow (-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) - 1 = -3 \Rightarrow 4b - 2c = 6$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2b}{3} + c = -\frac{1}{3} \\ 4b - 2c = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2b + 3c = -1 \\ 4b - 2c = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 1; c = -1$$

b) Corte con el eje X $\Rightarrow -x^3 - x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -1 \Rightarrow (1, 0); (-1, 0)$

Corte con el eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1)$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

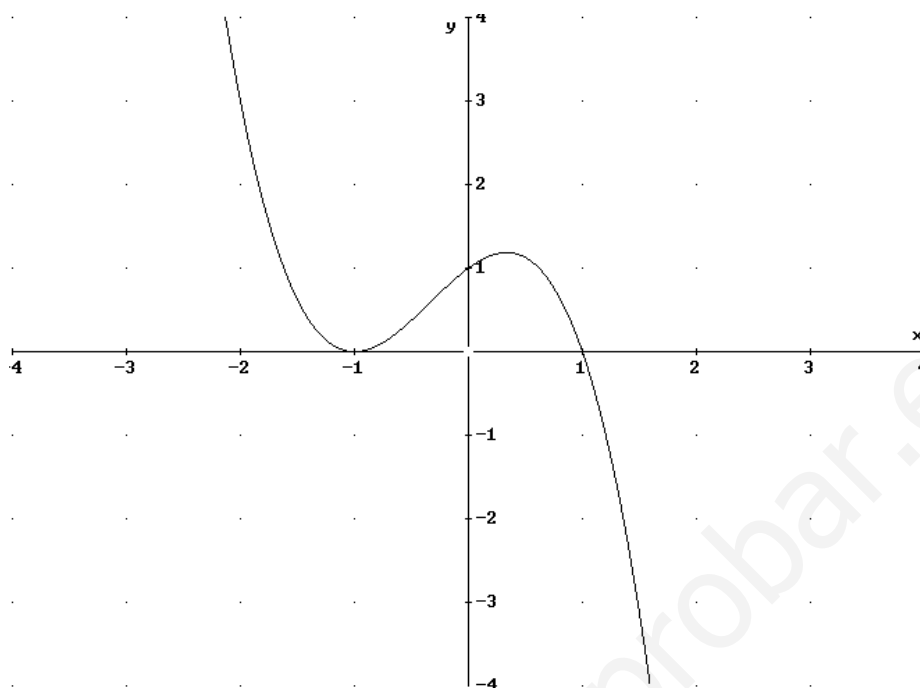
$$g'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-6} = \frac{2 \pm 4}{-6} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$
Signo $g'(x)$	-	+	-
Función	D	C	D

Creciente en $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Máximo en $\left(\frac{1}{3}, \frac{32}{27}\right)$ y mínimo en $(-1, 0)$

Hacemos la representación gráfica.



Calculamos el área que nos piden

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 (-x^3 - x^2 + x + 1) dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = \\
 &= \left(-\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 1 \right) = \frac{11}{12} - \left(-\frac{5}{12} \right) = \frac{4}{3} u^2
 \end{aligned}$$

El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la venta de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dada por la siguiente función:

$$B(x) = -0'02x^2 + 1'3x - 15, \quad x \geq 0.$$

- Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX
- ¿Para qué valores de x la finca no tiene pérdidas?
- ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?
- ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5000 €?

SOCIALES II. 2022 JULIO. EJERCICIO B4

RESOLUCIÓN

- a) Calculamos los puntos de corte con el eje OX

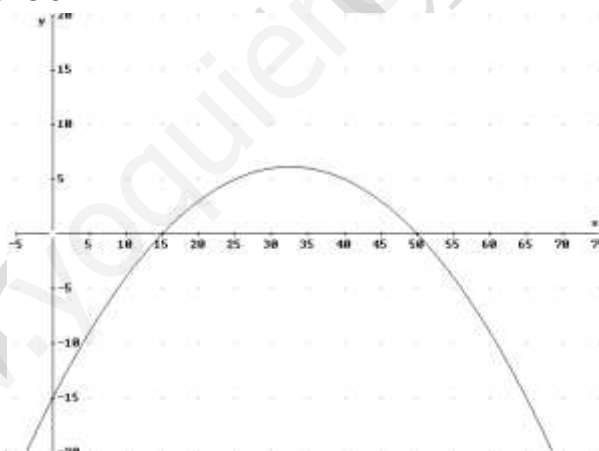
$$-0'02x^2 + 1'3x - 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1'3 \pm \sqrt{1'69 - 1'2}}{-0'04} = \frac{-1'3 \pm 0'7}{-0'04} = \begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = 50 \end{cases}$$

Luego, los puntos son: (15,0) y (50,0).

Calculamos el vértice de la parábola: $x_{\text{vértice}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-1'3}{-0'04} = 32'5$

Luego, el vértice es el punto: (32'5, 6'125).

Hacemos el dibujo de la función



- b) La finca no tiene pérdidas para $B(x) \geq 0 \Rightarrow 15 \leq x \leq 50$, es decir, entre 15.000 y 50.000 kilogramos de aceitunas.

- c) El máximo es el vértice de la parábola, luego, el beneficio máximo son 6.125 euros y se alcanza vendiendo 32.500 kilogramos de aceitunas.

- d)

$$-0'02x^2 + 1'3x - 15 = 5 \Rightarrow -0'02x^2 + 1'3x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1'3 \pm \sqrt{1'69 - 1'6}}{-0'04} = \frac{-1'3 \pm 0'3}{-0'04} = \begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = 40 \end{cases}$$

Luego, debe vender 25.000 ó 40.000 kilogramos de aceitunas.