

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio A2
- Reserva 1, Ejercicio A1
- Reserva 2, Ejercicio A2
- Reserva 3, Ejercicio A1
- Reserva 4, Ejercicio A2
- Julio, Ejercicio A1

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Donde a es un número real.

a) Halle los valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa.

b) Para $a = 2$, calcule la matriz inversa de A

c) Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C$

SOCIALES II. 2022 JUNIO. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow a = 3 ; a = 1$$

Tiene inversa para todos los valores de $a \neq 1$ y 3

b) Calculamos la inversa para $a = 2$

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz X

$$X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C \Rightarrow X \cdot A = B^t \cdot C - I_3 \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = (B^t \cdot C - I_3) \cdot A^{-1} \Rightarrow X = (B^t \cdot C - I_3) \cdot A^{-1}$$

$$\begin{aligned} X &= (B^t \cdot C - I_3) \cdot A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -28 & -21 & 19 \\ 16 & 12 & -11 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -a-1 \\ -1 & a & a+1 \\ 1 & -3 & -a \end{pmatrix}$

Donde a es un número real. Determine de manera justificada:

a) Los valores de a para los que la matriz A tiene inversa.

b) Las matrices A^2 , A^3 y A^{2022} para $a = 4$

c) La matriz X que verifica que $X \cdot A = I_3$ para $a = 3$.

SOCIALES II. 2022 RESERVA 1. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -a-1 \\ -1 & a & a+1 \\ 1 & -3 & -a \end{vmatrix} = -2a^2 - 3a - 3 - 3a - 3 + a^2 + a + 3a + 6a + 6 = -a^2 + 4a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores de a distintos de 0 y 4

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } A^{2022} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

c) Como A tiene inversa, la ecuación matricial tiene solución

$$X \cdot A = I_3 \Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = I_3 \cdot A^{-1} \Rightarrow X = I_3 \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa de A

$$X = A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}^t}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 8 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, donde a es un número real

a) Determine los valores de a para que la matriz A no sea invertible.

b) Para $a = 5$, calcule la inversa de la matriz A .

c) Para $a = 5$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

SOCIALES II. 2022 RESERVA 2. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ 8 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3 - 16a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \\ a = -4 \end{cases}$$

Luego, la matriz A no tiene inversa para $a = 0$, $a = 4$ y $a = -4$.

b) Calculamos la inversa para $a = 5$

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 25 & -40 & 0 \\ -10 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}^t}{45} = \frac{\begin{pmatrix} 25 & -10 & 0 \\ -40 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}{45} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{8}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

c) Resolvemos la ecuación matricial para $a = 5$

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Luego:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & 0 \\ -\frac{8}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Razone si se pueden efectuar las siguientes operaciones y realice las que sean posibles:

$$C \cdot A \quad A + B \quad C^t \cdot B^t$$

b) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B \cdot X + C$.

SOCIALES II. 2022 RESERVA 3. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) $C_{(3,1)} \cdot A_{(3,3)} \Rightarrow$ No se puede, ya que el número de columnas de C no coincide con el número de filas de A .

$A + B \Rightarrow$ Si se puede ya que son del mismo orden

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$C^t_{(1,3)} \cdot B^t_{(3,3)} \Rightarrow$ Si se puede, ya que el número de columnas de C^t coincide con el número de filas de B^t .

$$C^t \cdot B^t = (3 \quad -7 \quad -2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (8 \quad 6 \quad 8)$$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$A \cdot X = B \cdot X + C \Rightarrow A \cdot X - B \cdot X = C \Rightarrow (A - B) \cdot X = C \Rightarrow (A - B)^{-1} \cdot (A - B) \cdot X = (A - B)^{-1} C \Rightarrow X = (A - B)^{-1} C$$

Calculamos la inversa de $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$(A - B)^{-1} = \frac{((A - B)^{adj})^t}{|A - B|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Luego: $X = (A - B)^{-1} C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ 3 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

a) Resuelva la ecuación matricial $A^t - X \cdot A = 3 \cdot I_3$.

b) ¿Existe algún valor del parámetro a para el que se verifique $C^t \cdot D = B$? En caso afirmativo, calcule dicho valor.

SOCIALES. 2022 RESERVA 4. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) Despejamos X

$$A^t - X \cdot A = 3 \cdot I_3 \Rightarrow A^t - 3 \cdot I_3 = X \cdot A \Rightarrow (A^t - 3 \cdot I_3) \cdot A^{-1} = X \cdot A \cdot A^{-1} \Rightarrow X = (A^t - 3 \cdot I_3) \cdot A^{-1}$$

$$A^t - 3 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & -8 & 5 \\ -24 & -38 & 30 \\ -22 & -34 & 25 \end{pmatrix}^t}{10} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & -24 & -22 \\ -8 & -38 & -34 \\ 5 & 30 & 25 \end{pmatrix}}{10} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & -24 & -22 \\ -8 & -38 & -34 \\ 5 & 30 & 25 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^t - 3 \cdot I_3) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & -24 & -22 \\ -8 & -38 & -34 \\ 5 & 30 & 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -65 & -360 & -315 \\ 40 & 220 & 200 \\ -59 & -314 & -267 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & -36 & -\frac{63}{2} \\ 4 & 22 & 20 \\ -\frac{59}{10} & -\frac{157}{5} & -\frac{267}{10} \end{pmatrix}$$

b)

$$C^t \cdot D = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 2 & 2 & -1 - 2a \\ 2a^2 - 3 & 3 & -2 - 3a \\ a^2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -2$$

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determine la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2 \cdot C$.

b) Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que $A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B)$.

SOCIALES II. 2022 JULIO. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{(A^{adj})^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}^t}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación matricial

$$A \cdot X + B = A^2 \cdot C \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X + A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot A^2 \cdot C \Rightarrow X = A \cdot C - A^{-1} \cdot B$$

Calculamos la matriz X

$$\begin{aligned} X &= A \cdot C - A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{13}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{19}{3} \\ -\frac{13}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Calculamos el orden de las matrices P y Q

$$A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B) \Rightarrow \begin{cases} (3,3) \cdot (a,b) + (3,2) \Rightarrow P^t = (3,2) \Rightarrow P = (2,3) \\ (3,2) \cdot Q \cdot (3,2) = (2,3) \Rightarrow Q = (2,3) \end{cases}$$