



Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función $f(x) = 3x^3 - 36x + 2$, se pide:

a) Determina las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos. (1 punto)

b) Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Analiza si es posible aplicarlo a la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$ y, en caso afirmativo, calcula en qué puntos se verifica la tesis del teorema en dicho intervalo. (1,5 puntos)

2A. a) Dado un número real $a > 0$, calcula el área del recinto encerrado entre la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = a + 1$. (1,5 puntos)

b) Explica razonadamente que cuando a tiende a ∞ , dicho área tiende a cero. (1 punto)

3A. a) Clasifica en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 100y - z = 100 \\ x - 100y + 2z = 0 \\ x + 300y + kz = 200 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo en el caso en que sea compatible indeterminado. (1 punto)

4A. a) Comprueba que las direcciones de las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$,

$\lambda \in \mathbb{R}$, son perpendiculares. (1 punto)

b) Halla la ecuación general de un plano π que contenga a la recta r y sea paralelo a r' . (1,5 puntos)

Propuesta A

$$\boxed{1A} \quad f(x) = 3x^3 - 36x + 2$$

a) Máximos y mínimos relativos

$$f'(x) = 9x^2 - 36$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$f''(x) = 18x$$

$$f''(2) > 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=2 \text{ es un mín. relativo de coordenadas} \\ (2, f(2)) = (2, -34) \end{array} \right\}$$

$$f''(-2) < 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=-2 \text{ es un máx. relativo de coordenadas} \\ (-2, f(-2)) = (-2, 110) \end{array} \right\}$$

b) Teorema del valor medio de Lagrange

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces $\exists c \in (a, b)$ t.q.

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Aplicación

$f(x) = 3x^3 - 36x + 2$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica, luego es continua en $[-2, 2]$ y derivable en $(-2, 2)$ y, por tanto, por el teorema del valor medio de Lagrange, $\exists c \in (-2, 2)$

t.q.
$$f(2) - f(-2) = f'(c)(2 - (-2))$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Como } f(2) = -34 \\ f(-2) = -110 \\ f'(x) = 9x^2 - 36 \end{array} \right\} \Rightarrow -34 - 110 = (9c^2 - 36) \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -36 = 9c^2 - 36 \Rightarrow 9c^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 0 \in [-2, 2]}$$

2A $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a) $A = \int_a^{a+1} f(x) dx, a > 0$

Primitiva

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{-1}{x} + C = G(x)$$

Area

$$\boxed{A = \int_a^{a+1} f(x) dx = G(a+1) - G(a) = \frac{-1}{a+1} + \frac{1}{a} = \frac{-a + a+1}{a(a+1)} = \frac{1}{a(a+1)} u^2}$$

b) $\lim_{a \rightarrow \infty} A(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a(a+1)} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0$

3A a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 \\ 1 & -100 & 2 \\ 1 & 300 & k \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 1 & -100 & 2 & 0 \\ 1 & 300 & k & 200 \end{pmatrix}$

Rango de A

$$|A| = -100k + 200 - 300 - 100 - 600 - 100k = -800 - 200k = 0 \Rightarrow k = -4$$

Si $k \neq -4 \Rightarrow \text{rango } A = 3$

$$k = -4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 \\ 1 & -100 & 2 \\ 1 & 300 & -4 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 100 \\ 1 & -100 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2$$

Rango de $\tilde{A}$

$$\text{Si } k = -4 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 1 & -100 & 2 & 0 \\ 1 & 300 & -4 & 200 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-F_1 + F_2 \\ -F_1 + F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 0 & -200 & 3 & -100 \\ 0 & 200 & -3 & 100 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 0 & -200 & 3 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{A} = 2$$

Discusión

Si $k \neq -4 \Rightarrow \text{rango } A = 3 = \text{rango } \tilde{A} = n^{\circ} \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

$k = -4 \Rightarrow \text{rango } A = 2 = \text{rango } \tilde{A} < 3 = n^{\circ} \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

donde hemos usado el teorema de Rouché-Fröbenius

b) Resolución para $k = -4$

Por lo visto en el apartado a), tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 100 & -1 & 100 \\ 0 & -200 & 3 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \end{array}$$

Llamamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$

Sustituyendo en [2]: $y = \frac{-100 - 3\lambda}{-200} = \frac{100 + 3\lambda}{200}$

Sustituyendo en [1]: $x = 100 + \lambda - 100 \cdot \frac{100 + 3\lambda}{200} = \frac{100 - \lambda}{2}$

Soluciones: $(x, y, z) = \left(\frac{100 - \lambda}{2}, \frac{100 + 3\lambda}{200}, \lambda \right)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

4A a) $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y+z=1 \end{cases}, r' \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

$r: y=1-z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = (0, -1, 1) \text{ y } \vec{u}_{r'} = (2, 1, 1)$

$\vec{u}_r \perp \vec{u}_{r'} \Leftrightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{u}_{r'} = 0 \Leftrightarrow (0, -1, 1) \cdot (2, 1, 1) = -1 + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ las direcciones de r y r' son perpendiculares

b) $\pi \equiv \{P_r, \vec{u}_r, \vec{u}_{r'}\}$ donde $P_r \in r$

$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 0 & z \\ y-1 & -1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y - z + 1 = 0$

Cálculo de Σ

$$\boxed{\Sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/13 & -2/13 & 1/13 \\ 2/13 & 6/13 & -3/13 \\ -2/13 & 1/13 & 6/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4B $\pi \equiv ax + y + bz = c$

$$\pi' \equiv x + 2y = 3$$

$$\Gamma \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

- Pasa por el origen de coordenadas

$$O(0,0,0) \in \pi \Rightarrow a \cdot 0 + 0 + b \cdot 0 = c \Rightarrow c = 0$$

- $\pi \perp \pi'$

$$\pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi} \perp \vec{n}_{\pi'} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi} \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a, 1, b) \cdot (1, 2, 0) = 0 \Rightarrow a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

- $\Gamma \subset \pi$

$$\Gamma \subset \pi \Rightarrow \vec{u}_{\Gamma} \perp \vec{n}_{\pi} \Rightarrow \vec{u}_{\Gamma} \cdot \vec{n}_{\pi} = 0$$

$$(1, 1, 1) \cdot (-2, 1, b) = 0 \Rightarrow -2 + 1 + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

Solución: el plano pedido es $-2x + y + z = 0$

PROPUESTA B

1B. El espacio recorrido por una partícula, medido en metros, está determinado en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $e(t) = At^2 + B \ln(t+1) + C$. Se pide:

a) Determina los coeficientes $A, B, C \in \mathbb{R}$ sabiendo que en el instante $t = 0$ la partícula ha recorrido 6 m , la velocidad inicial para $t = 0$ es de 8 m/s y que la aceleración cuando $t = 1$ segundo es de 2 m/s^2 . (1,5 puntos)

b) Para los valores obtenidos de A, B y C , calcula $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e(t)}{t^2}$. (1 punto)

(Nota: $\ln(t+1)$ representa el logaritmo neperiano de $t+1$. Recuerda además que la velocidad es la derivada primera del espacio respecto del tiempo y la aceleración la derivada segunda.)

2B. Calcula la integral indefinida: $\int \frac{1}{x^3 + x^2} dx$. (2,5 puntos)

3B. a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A = B - 2X$, donde A, B y X son matrices cuadradas de orden 3. (1,25 puntos)

b) Calcula la matriz X siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. (1,25 puntos)

4B. Calcula los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ de la ecuación del plano $\pi \equiv ax + y + bz = c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas, es perpendicular al plano de ecuación $\pi' \equiv x + 2y = 3$ y que contiene a la recta de ecuaciones

$$r \equiv \begin{cases} x &= 1 + \lambda \\ y &= 1 + \lambda \\ z &= 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(2,5 puntos)

Reserva 1 de 2010

Propuesta B

1B $e(t) = At^2 + B \ln(t+1) + C, t \geq 0$

$$\begin{cases} e(0) = 6 \\ e'(0) = 8 \\ e''(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e(0) = C = 6 \\ v(0) = e'(0) = B = 8 \\ e'(t) = 2At + \frac{B}{t+1} \end{cases}$$

$$a(1) = e''(1) = 2A - \frac{8}{4} = 2A - 2 = 2 \Rightarrow A = 2$$

$$e''(t) = 2A - \frac{B}{(t+1)^2}$$

Solución: $(A, B, C) = (2, 8, 6)$ cumplen lo que se pide

b) $e(t) = 2t^2 + 8 \ln(t+1) + 6$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^2 + 8 \ln(t+1) + 6}{t^2} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} 2 + 8 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t+1)}{t^2} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6}{t^2} = 2 + 8 \cdot 0 + 0 = 2$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(t+1)}{t^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{t+1}}{2t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t+1)2t} = 0$$

2B $\int \frac{1}{x^3 + x^2} dx$

Descomponemos en fracciones simples $\frac{1}{x^3 + x^2}$

$$x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (doble)} \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^3 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow B=1 \\ x=-1 \Rightarrow C=1 \\ \text{Derivamos: } 0 = 2Ax + A + B + 2xC \end{cases}$$

$$x=0 \Rightarrow 0 = A+B \Rightarrow A=-1$$

Integral

$$\int \frac{1}{x^3+x^2} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= -\ln|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \ln|x+1| = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C$$

3B a) $XA = B - 2X$

$$XA + 2X = B$$

$$X(A + 2I) = B$$

$$X(A + 2I)(A + 2I)^{-1} = B(A + 2I)^{-1}$$

$$X = B(A + 2I)^{-1}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Cálculo de $A + 2I$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(A + 2I)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2:2}]{\substack{F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_2:2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3F_1 + F_3} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & | & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -13/2 & | & 1 & -1/2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3: (-2/13)} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2/13 & 1/13 & 6/13 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}F_3 + F_2 \\ -2F_3 + F_1}]{\substack{-\frac{1}{2}F_3 + F_2 \\ -2F_3 + F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4/13 & -2/13 & 1/13 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/13 & 6/13 & -3/13 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2/13 & 1/13 & 6/13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A + 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/13 & -2/13 & 1/13 \\ 1/13 & 6/13 & -3/13 \\ -2/13 & 1/13 & 6/13 \end{pmatrix}$$