



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Definición de derivada de una función en un punto. (0,5 puntos)

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{ax + \operatorname{sen} x}{2x - x^2} & \text{si } x < 0 \\ bx + c & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, determina los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$

para que $f(x)$ sea una función continua en $x = 0$, y además sea continua y derivable en $x = 1$. (2 puntos)

2A. a) Determina el dominio de la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$. (1 punto)

b) Calcula la integral definida: $\int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx$. (1,5 puntos)

3A. Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) ¿Para qué valores $\lambda \in \mathbb{R}$ existe la matriz inversa de M ? (1 punto)

b) Para $\lambda = 0$ resuelve, si es posible, la ecuación $X \cdot M = 2F$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3. (1,5 puntos)

4A. Dado el punto $P(0, 0, 1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Calcula la distancia desde el punto P a la recta r . (1,25 puntos)

b) Halla unas ecuaciones paramétricas de una recta s que pase por el punto P y corte perpendicularmente a la recta r . (1,25 puntos)

Propuesta A

a) f derivable en $a \in A \cap A' \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$

1A

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax + \sin x}{2x - x^2} & \text{si } x < 0 \\ bx + c & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Continuidad en $x=0$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + \sin x}{2x - x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a + \cos x}{2 - 2x} = \frac{a+1}{2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (bx + c) = c = f(0)$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{2} = c \Rightarrow a - 2c = -1$$

Continuidad en $x=1$: ¿ $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx + c) = b + c \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow b + c = \frac{1}{2} \Rightarrow 2b + 2c = 1$$

Derivabilidad en $x=1$: ¿ $\exists f'(1)$?

$$f'_-(1) = b \leftarrow$$

$$y = bx + c$$

$$y' = b$$

$$f'_+(1) = -\frac{1}{2} \leftarrow$$

$$y = \frac{1}{1+x}$$

$$y' = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$b = -\frac{1}{4} \quad (\text{para que } f \text{ sea derivable en } x=1)$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a - 2c = -1 \\ 2b + 2c = 1 \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow (a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Solución: $(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ hacen que f sea continua en $x=0$ y, continua y derivable en $x=1$

[2A] a) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : 2x+1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{1}{2}\} = \\ &= \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right) \end{aligned}$$

b) $\int_{-1/2}^0 f(x) dx$

Primitiva

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \sqrt{2x+1} dx = \int (2x+1)^{1/2} dx = \frac{1}{2} \int 2(2x+1)^{1/2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+1)^3} + C = G(x) \end{aligned}$$

Integral definida

$$\int_{-1/2}^0 f(x) dx = G(0) - G\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

[3A] $M = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\exists M^{-1} \Leftrightarrow |M| \neq 0$

$$|M| = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Solución: $\exists M^{-1} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{-2, -1\}$

$$b) \Sigma M = 2F$$

$$\Sigma M M^{-1} = 2F M^{-1}$$

$$\boxed{\Sigma = 2F M^{-1}}$$

$$2F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9/2 & -1/2 & 3/2 \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & -4 \\ -9 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

Cálculo de M^{-1} para $\lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -2F_1 + F_2 \\ -F_3 \end{array}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -6F_3 + F_2 \\ -3F_3 + F_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2 + F_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1:2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\boxed{4A} \quad P(0,0,1), \quad r \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=0 \end{cases}$$

2) Primera forma

$$d(P, r) = \frac{|\vec{u}_r \times \vec{AP}|}{|\vec{u}_r|} \quad \text{donde } A \in r$$

$$\text{Si } x=y=1 \Rightarrow z=1 \Rightarrow A(1,1,1)$$

$$\vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} + \vec{j} - \vec{k} + \vec{i} = (1, 1, -2)$$

$$\vec{AP} = (0, 0, 1) - (1, 1, 1) = (-1, -1, 0)$$

$$\vec{u}_r \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} + 2\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{i} = (-2, 2, 0)$$

$$\boxed{d(P, r) = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{3} u}$$

Segunda forma

1) Determinamos un plano π perpendicular a r que contenga a P

$$\pi \equiv \{P, \vec{n}_\pi = \vec{u}_r\}$$

$$\pi \equiv \vec{PX} \cdot \vec{u}_r = 0 \text{ donde } X = (x, y, z) \in \pi$$

$$\vec{PX} = (x, y, z) - (0, 0, 1) = (x, y, z-1)$$

$$\vec{PX} \cdot \vec{u}_r = 0 \Leftrightarrow (x, y, z-1) \cdot (1, 1, -2) = \boxed{x + y - 2z + 2 = 0 \equiv \pi}$$

2) Calculamos el punto de corte, Q , de r y π

$$Q \begin{cases} x + y - 2z = -2 \\ x + y + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{-F_1+F_2 \\ -F_1+F_3}]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

De [2]: $z = \frac{5}{3}$

Sustituimos en [3]: $y = \frac{2 - 2 \cdot \frac{5}{3}}{-2} = \frac{2}{3}$

Como $x - y = 0 \Rightarrow x = y = \frac{2}{3}$

Luego $\boxed{Q\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)}$

3) Calculamos $d(P, Q) = |\vec{PQ}|$

$$\vec{PQ} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) - (0, 0, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} 4) \quad d(P, r) &= d(P, Q) = |\vec{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{12}}{3} u} \end{aligned}$$

b) s recta t.g. $\begin{cases} P \in s \\ s \perp r \end{cases} \Rightarrow s \equiv \{P, \vec{PQ}\} \equiv \begin{cases} x = \frac{2}{3}\lambda \\ y = \frac{2}{3}\lambda \\ z = 1 + \frac{2}{3}\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$

Septiembre 2010

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. Dada la función definida por $f(x) = \begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix}$, se pide:

a) Halla su expresión polinómica simplificada calculando el determinante. (0,5 puntos)

b) Calcula las coordenadas de su punto de inflexión y los intervalos en donde sea cóncava hacia arriba ($\cup$) y cóncava hacia abajo ($\cap$). (2 puntos)

2B. a) Enuncia la fórmula de integración por partes. (0,5 puntos)

b) Calcula la integral indefinida: $\int x \ln x \, dx$.

Nota: $\ln x$ representa el logaritmo neperiano de x . (2 puntos)

3B. a) Clasifica en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y + \lambda z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = -3$. (1 punto)

4B. Consideremos los planos $\pi \equiv ax + by + 3z = c$, $\pi' \equiv 2x - y + z = 3$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ y + 2z = -4 \end{cases}$$

a) Determina los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que los planos π y π' sean paralelos. (1 punto)

b) Para los valores a y b obtenidos, estudia la posición relativa del plano π y la recta r en función de $c \in \mathbb{R}$. (1,5 puntos)

Propuesta B

1B $f(x) = \begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix}$

a) $f(x) = 3x \cdot x \cdot (x-6) - 1 = 3x^3 - 18x^2 - 1$

b) $f'(x) = 9x^2 - 36x$

$f''(x) = 18x - 36$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 18x - 36 = 0 \Rightarrow x = \frac{36}{18} = 2$

$\begin{array}{c} - & & + \\ | & & | \\ \textcircled{0} & 2 & \textcircled{3} \end{array}$ Signo de f''

$f'''(x) = 18$

$f'''(2) \neq 0$

Conclusión:

f es $\begin{cases} \text{cóncava hacia arriba (U)} & \text{en } (2, +\infty) \\ \text{cóncava hacia abajo (∩)} & \text{en } (-\infty, 2) \end{cases}$

f tiene en $x=2$ un punto de inflexión de coordenadas $(2, f(2)) = (2, -49)$

2B a) Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y f y g dos funciones con derivada continua en D . Entonces

$\int fg' = fg - \int f'g$

b) $\int x \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x \, dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx =$
 $= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

3B $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \lambda & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

Rango de A

Cipri

$$|A| = 5\lambda - 10 \Rightarrow 5\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$\text{Si } \lambda \neq 2 \Rightarrow \text{rango } A = 3$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2$$

Rango de $\tilde{A}$

$$\begin{aligned} \text{Si } \lambda = 2 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2F_2 + F_1 \\ -2F_3 + F_1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_3} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{A} = 3 \end{aligned}$$

Discusión

Si $\lambda \neq 2 \Rightarrow \text{rango } A = 3 = \text{rango } \tilde{A} = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

$\lambda = 2 \Rightarrow \text{rango } A = 2 \neq 3 = \text{rango } \tilde{A} \Rightarrow \text{S.I.}$

donde hemos usado el teorema de Rouché-Fröbenius

b) Resolución para $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2F_2 + F_1 \\ -2F_3 + F_1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -20 \end{pmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

$$\text{De } [3]: z = \frac{-20}{2} = -10$$

$$\text{Sustituimos en } [2]: y = \frac{-(-10)}{5} = 2$$

$$\text{Sustituimos en } [1]: x = \frac{-3 \cdot (-10) - 2}{2} = 14$$

$$\text{Solución: } (x, y, z) = (14, 2, -10)$$

$$\boxed{4B} \quad \begin{aligned} \pi &\equiv ax + by + 3z = c \\ \pi' &\equiv 2x - y + z = 3 \end{aligned}$$

$$\pi \parallel \pi' \text{ si } \begin{cases} \vec{n}_\pi \parallel \vec{n}_{\pi'} \\ P \in \pi \Rightarrow P \notin \pi' \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (a, b, 3) \\ \vec{n}_{\pi'} = (2, -1, 1) \end{array} \right\} \vec{n}_\pi \parallel \vec{n}_{\pi'} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{-1} = \frac{3}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = 3 \Rightarrow a = 6 \\ \frac{b}{-1} = 3 \Rightarrow b = -3 \end{cases}$$

$$\text{Si } x=y=0 \Rightarrow P(0,0,\frac{c}{3}) \in \pi \Rightarrow 2 \cdot 0 - 0 + \frac{c}{3} = 3 \Rightarrow c \neq 9$$

Conclusion : $\pi \parallel \pi'$ si $a=6, b=-3$ y $c \neq 9$

$$b) \pi \equiv 6x - 3y + 3z = c \Rightarrow \vec{n}_\pi = (6, -3, 3)$$

$$\Gamma \equiv \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ y + 2z = -4 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Gamma = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{k} - 3\vec{i} - 4\vec{j} = (-3, -4, 2)$$

$$\vec{u}_\Gamma \cdot \vec{n}_\pi = (-3, -4, 2) \cdot (6, -3, 3) = -18 + 12 + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_\Gamma \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \begin{cases} \Gamma \subset \pi & \text{si } [P \in \Gamma \Rightarrow P \in \pi] \\ \Gamma \parallel \pi & \text{si } [P \in \Gamma \Rightarrow P \notin \pi] \end{cases}$$

$$\text{Si } z=0 \Rightarrow y=-4 \text{ y } x=0 \Rightarrow P(0, -4, 0) \in \Gamma$$

$$\dot{\text{¿}} P \in \pi ? \quad 6 \cdot 0 - 3 \cdot (-4) + 3 \cdot 0 = c \Rightarrow c = 12$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } c=12 \Rightarrow \Gamma \subset \pi \\ c \neq 12 \Rightarrow \Gamma \parallel \pi \end{array}}$$