



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad y lo más detalladamente posible. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano. (0,5 puntos)

b) ¿Se puede aplicar dicho teorema a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en algún intervalo? (1 punto)

c) Demuestra que la función $f(x)$ anterior y $g(x) = 2x - 1$ se cortan al menos en un punto. (1 punto)

2A. a) Representa gráficamente las parábolas $f(x) = x^2 - 3x - 1$ y $g(x) = -x^2 + x + 5$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área del recinto limitado por ambas gráficas. (2 puntos)

3A. a) Clasifica en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $k = 1$. (1 punto)

4A. a) Estudia la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y el plano de ecuación general $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$. (1,5 puntos)

b) Encuentra la ecuación general de un plano π' perpendicular a π que contenga a r . (1 punto)

(sigue a la vuelta)

Junio de 2010

Propuesta A

1A) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Se tiene que f es continua en $\mathbb{R}$, ya que $1+x^2=0$ no tiene soluciones reales, y por tanto, también es continua en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$.

Sin embargo, como $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $\nexists [a, b]$ tal que $\text{signo } f(a) \neq \text{signo } f(b)$, y como consecuencia, no se cumple el teorema de Bolzano.

c) Consideramos la función

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{1+x^2} - (2x-1) =$$

que verifica:

- h es continua en $\mathbb{R}$, por ser diferencia de funciones continuas en $\mathbb{R}$
- consideramos $[a, b] = [0, 1]$
- $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(1) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{signo } f(0) \neq \text{signo } f(1)$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0, 1)$ tal que $h(c) = 0$, y por tanto, c es un punto de corte de f y g .

2A) $y = x^2 - 3x + 1$

Vértice:

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} = 1,5 \\ y_v &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 = -1,25 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} = 1,5 \\ y_v &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 = -1,25 \end{aligned}} \right\} V_f(1,5, -1,25)$$

Puntos de corte con OX

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0,38 \\ 2,62 \end{cases}$$

Punto de corte con OY

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$y = -x^2 + x + 5$$

Vértice

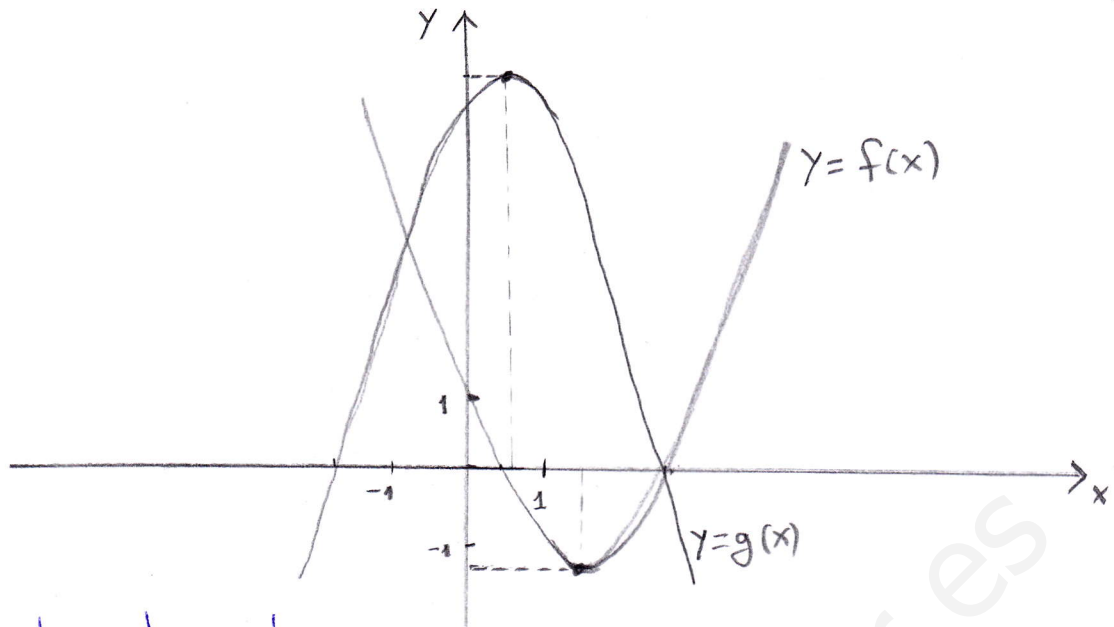
$$\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2 \cdot (-1)} = 0,5 \\ y_v &= -0,5^2 + 0,5 + 5 = 5,25 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2 \cdot (-1)} = 0,5 \\ y_v &= -0,5^2 + 0,5 + 5 = 5,25 \end{aligned}} \right\} V_g(0,5, 5,25)$$

Puntos de corte con OX

$$-x^2 + x + 5 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1,79 \\ 2,79 \end{cases}$$

Punto de corte con OY

$$x = 0 \Rightarrow y = 5$$



b) Límites de integración

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow (\text{como } g \text{ está por encima}) g(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + x + 5 - (x^2 - 3x - 1) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 4x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Primitiva

$$\int (g(x) - f(x)) dx = \int (-2x^2 + 4x + 6) dx = -\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C = G(x)$$

Área

$$A = \int_{-1}^3 (-2x^2 + 4x + 6) dx = G(3) - G(-1) = 18 - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{64}{3} \text{ u}^2$$

(3A) a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{pmatrix}$

Rango de A

$$|A| = k^3 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Si } k \neq \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{rango } A = 3$$

$$\text{Si } k = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-F_1 + F_2 \\ -F_1 + F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } A = 1$$

$$\text{Si } k = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 2$$

Rango de $\tilde{A}$

$$\text{Si } k=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{A} = 1$$

$$\text{Si } k=-2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3+F_1]{2F_2+F_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } \tilde{A} = 3$$

Discusión:

Si $k \neq \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{rango } A = 3 = \text{rango } \tilde{A} = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

Si $k=1 \Rightarrow \text{rango } A = 1 = \text{rango } \tilde{A} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

Si $k=-2 \Rightarrow \text{rango } A = 2 \neq 3 = \text{rango } \tilde{A} \Rightarrow \text{S.I.}$

donde hemos usado el teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Resolución para $k=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) [1]$$

Llamamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$

$y = \mu \in \mathbb{R}$

Sustituyendo en [1]: $x = 1 - y - z = 1 - \lambda - \mu$

Soluciones: $(x, y, z) = (1 - \mu - \lambda, \lambda, \lambda)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$(4A) a) r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0, 0, 1) \\ \vec{u}_r = (-1, 0, 1) \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x - y + 3z = 6 \Rightarrow \vec{n}_\pi = (2, -1, 3)$$

$$\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-1, 0, 1) \cdot (2, -1, 3) = -2 + 3 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_r \not\perp \vec{n}_\pi \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ r y π son secantes (se cortan en un punto)

$$b) \pi' \equiv \{P_r, \vec{u}_r, \vec{n}_\pi\}$$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x & -1 & z \\ y & 0 & -1 \\ z-1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y + z - 1 + x + 3y = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x + 5y + z - 1 = 0}$$

www.yoquieroaprobar.es

Junio 2010

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. La velocidad de una partícula, medida en m/sg , está determinada en función del tiempo $t \geq 0$, medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$. Se pide:

- a) ¿En qué instante de tiempo del intervalo $[0, 3]$ se alcanza la velocidad máxima? (1,25 puntos)
- b) Calcula $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido. (1,25 puntos)

2B. Calcula la integral indefinida: $\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx$.

(Nota: Puedes probar el cambio de variable $y = \operatorname{sen} x$) (2,5 puntos)

3B. Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$. Determina los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma que se cumpla que el determinante de la matriz B sea igual a 8, y además se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$. (2,5 puntos)

4B. Dado el plano $\pi \equiv x + z = 4$ y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

- a) Encuentra la ecuación general del plano π' paralelo a π que pasa por P . (1,25 puntos)
 - b) Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta r perpendicular a π que pasa por P . (1,25 puntos)
-

Propuesta B

1B a) $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$; ¿Velocidad máxima en $[0, 3]$?

$$v'(t) = (2t + 2)e^{-t} - (t^2 + 2t)e^{-t} = (-t^2 + 2)e^{-t}$$

$$v'(t) = 0 \Rightarrow (-t^2 + 2)e^{-t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -t^2 + 2 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2} \Rightarrow t = \sqrt{2} \\ e^{-t} = 0 \text{ Nunca} \end{cases} \quad (\text{ya que } t \geq 0)$$

$$v''(t) = -2te^{-t} - (-t^2 + 2)e^{-t}$$

$$v''(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} - (-(\sqrt{2})^2 + 2)e^{-\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} < 0 \Rightarrow t = \sqrt{2} \text{ es un máximo relativo de } v(t)$$

La velocidad es máxima a los $t = \sqrt{2}$ seg.

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 + 2t)e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 2t}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t + 2}{e^t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{regla de L'Hôpital}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^t} = 0 \end{aligned}$$

Interpretación: a medida que aumenta el tiempo, disminuye la velocidad

$$\begin{aligned} \text{2B } \int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx &= \left[\begin{array}{l} y = \sin x \\ dy = \cos x dx \end{array} \right] = \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \\ &= \arctg y = \arctg(\sin x) + C \end{aligned}$$

$$\text{3B } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix}$$

$$\bullet \det B = 8 \Leftrightarrow 2c - (a-3)(b+2) = 8 \Leftrightarrow -2a + 3b + 2c - ab = 2$$

$$\bullet AB = BA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a-3 \\ b+2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b+6 & 2a+c-6 \\ b+2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a-1 \\ 2b+4 & b+c+2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b+6=4 \Rightarrow b=-2 \\ 2a+c-6=a-1 \\ b+2=2b+4 \Rightarrow b=-2 \\ c=b+c+2 \Rightarrow b=-2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Resolvemos el sistema} \\ \left\{ \begin{array}{l} 2a+c-6=a-1 \\ -2a-6+2c+2a=2 \Rightarrow c=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow a=-1+6-4=1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Solución: } (a, b, c) = (1, -2, 4) \text{ cumple lo que se pide}}$$

$$\boxed{4B} \quad \pi \equiv x+z=4, \quad P(1,1,0)$$

$$a) \pi' \text{ plano t.g. } \left\{ \begin{array}{l} \pi' \parallel \pi \\ P \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi' \equiv x+z=D \\ P(1,1,0) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow D=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x+z=1}$$

$$b) r \text{ recta t.g. } \left\{ \begin{array}{l} r \perp \pi \\ P \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \{P, \vec{n}_{\pi}\}, \quad \vec{n}_{\pi} = (1, 0, 1)$$

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$$