Reserva 2 de 2011

UCLM UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, de forma que el área del triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(0,a)$ y $C(\frac{a}{a-1}, 0)$ sea mínima. (2,5 puntos)

2A. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x \ln(x)\, dx$. (Indicación: $\ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x). (1,25 puntos)

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$. (1,25 puntos)

3A. a) Despeja X de la ecuación matricial $X \cdot B - I = X \cdot A + A$, donde X, B, A e I son matrices de tipo 3×3. (1,25 puntos)

b) Calcula la matriz X de tamaño 3×3, solución de la ecuación, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (1,25 puntos)

4A. a) Analiza, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv 2x - y + z = 0$, $\pi_2 \equiv y + z = m$ y $\pi_3 \equiv mx + y - z = 8$. (1,25 puntos)

b) Razona que, independientemente del valor del parámetro m, los planos π_2 y π_3 son perpendiculares. (1,25 puntos)

(sigue a la vuelta)

Reserva 2 - 2011

Propuesta A

1A) $A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (0,a)-(0,0) = (0,a) \\ \overrightarrow{AC} = \left(\frac{a}{a-1},0\right)-(0,0) = \left(\frac{a}{a-1},0\right)\end{array}\right\} \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ \frac{a}{a-1} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{a-1}\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{\left(-\frac{a^2}{a-1}\right)^2} = \frac{a^2}{a-1}$$

$$S = A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{a-1} = S(a)$$

$$S'(a) = \frac{1}{2}\,\frac{2a(a-1)-a^2}{(a-1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2-2a}{(a-1)^2}$$

$$S''(a) = \frac{1}{2}\,\frac{(2a-2)(a-1)^2-2(a^2-2a)(a-1)}{(a-1)^4}$$

$$S'(a) = 0 \Leftrightarrow a^2-2a = 0 \Leftrightarrow a = \begin{cases} 0 & \text{No es solución} \\ 2 \end{cases}$$

$$S''(2) = 1 > 0 \Rightarrow \boxed{a=2} \text{ en un mínimo relativo}$$

1B) a) $$\int x\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x \longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \longrightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C}$$

b) $$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \longrightarrow t^2 = x \\ dx = 2t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{t}{1+t}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{1+t}\,dt =$$

$$= 2\left(\int (t-1)\,dt + \int \frac{1}{t+1}\,dt\right) = 2\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) =$$

$$= \boxed{2\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln\left|\sqrt{x}+1\right|\right) + C}$$

$$\begin{array}{r|l} t^2 & t+1 \\ \hline -t^2-t & t-1 \\ \hline -t & \\ t+1 & \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \frac{t^2}{t+1} = t-1+\frac{1}{t+1}$$

3A) a) $XB - XA = A + I \Rightarrow X(B-A) = A + I \Rightarrow$

$\Rightarrow X(B-A)(B-A)^{-1} = (A+I)(B-A)^{-1} \Rightarrow \boxed{X = (A+I)(B-A)^{-1}}$

b) Cálculo de $B-A$

$$B - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(B-A)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $A+I$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X

$$\boxed{X} = (A+I)(B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

4A) a) $\begin{cases} \pi_1 \equiv 2x - y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv \quad y + z = m \\ \pi_3 \equiv mx + y - z = 8 \end{cases}$ $\quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; \tilde{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & m \\ m & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

$|M| = -2 - m - 2 = -m - 4 = 0 \Rightarrow m = -4$

Si $\boxed{m \neq -4} \Rightarrow$ rango $M = 3 =$ rango $\tilde{M} =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado $\Rightarrow$ los tres planos se cortan en un punto

Si $\boxed{m = -4}$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1+F_4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3}$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{0} \left.\vphantom{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}\right\} \text{Sistema incompatible}$$

π_1 y π_2 no son paralelos ya que $\frac{2}{0} \neq \frac{-1}{1}$

π_1 y π_3 " " " ya que $\frac{2}{4} \neq \frac{-1}{1}$

π_2 y π_3 " " " ya que $\frac{0}{4} \neq \frac{1}{1}$

Por tanto, los tres planos se cortan dos a dos según tres rectas.

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. Dada la función $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}}$, se pide:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1,25 puntos)

b) Asíntotas verticales y oblícuas. (1,25 puntos)

2B. a) Representa gráficamente la región encerrada por las gráficas de las funciones $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x - 2}$ y $\boldsymbol{g(x) = -x^2 + 2x - 2}$. (0,5 puntos)

b) Calcula el área de dicha región. (2 puntos)

3B. a) Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius. (0,5 puntos)

b) Considera el sistema $\boldsymbol{A \cdot X = B}$, donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz 3×4 , $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B}$ es una matriz con una sola columna. ¿De qué dimensiones es la matriz $\boldsymbol{B}$? (0,50 puntos)

c) ¿Puede el sistema ser compatible determinado? (0,75 puntos)

d) Si el sistema es incompatible y el rango de la matriz $\boldsymbol{A}$ es dos, ¿cuál es el rango de la matriz ampliada $\boldsymbol{(A|B)}$? (0,75 puntos)

4B. Dados los puntos $\boldsymbol{P(1,1,2)}$ y $\boldsymbol{Q(1,1,0)}$, y la recta $\boldsymbol{r} \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 1 \\ y + z & = & 0 \end{array} \right.$, se pide:

a) Ecuación general del plano $\boldsymbol{\pi}$ que contiene al punto $\boldsymbol{P}$ y a la recta $\boldsymbol{r}$. (1,25 punto)

b) Halla la distancia desde el punto medio de los puntos $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ al plano $\boldsymbol{\pi}$ calculado en el apartado anterior. (1,25 puntos)

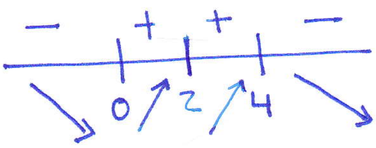
Propuesta B

1A) $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$ (Cuidado que el dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$)

a) $f'(x) = \dfrac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} = \dfrac{4x - x^2}{(2-x)^2}$

$f'(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{4x-x^2}{(2-x)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x - x^2 \\ (2-x)^2 > 0 \quad \text{Siempre } (\forall x \in \mathbb{R}) \end{cases}$

$4x - x^2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$



$\boxed{f \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } (0,4) - \{2\} \\ \text{decreciente en } (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \end{cases}}$

b) Asíntotas verticales: ¿$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$?

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{2-x} = +\infty \Rightarrow$ $\boxed{x = 2 \text{ es una asíntota vertical}}$

Asíntotas oblicuas

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{2x - x^2} = -1$

$n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - m_1 x \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2}{2-x} + x \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2 + 2x - x^2}{2-x} \right) =$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{2-x} = -2$

La recta $\boxed{y = -x - 2 \text{ es una asíntota oblicua}}$

¡¡OJO!! El haber puesto $\pm\infty$ en los límites ha sido después de asegurarme de que los límites no dependían de que fuese $+\infty$ o $-\infty$. Si no estamos seguros, primero hay que hacerlo con $+\infty$ y luego con $-\infty$, porque hay funciones que tienen 2 asíntotas oblicuas.

1B) a) $f(x) = x^2 - 2x - 2$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_v = 1^2 - 2 - 2 = -3 \end{array}\right\} V(1, -3)$

Puntos de corte con OX: $x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \dfrac{2 + \sqrt{12}}{2} \simeq 2{,}7 \\ \dfrac{2 - \sqrt{12}}{2} \simeq -0{,}7 \end{cases}$

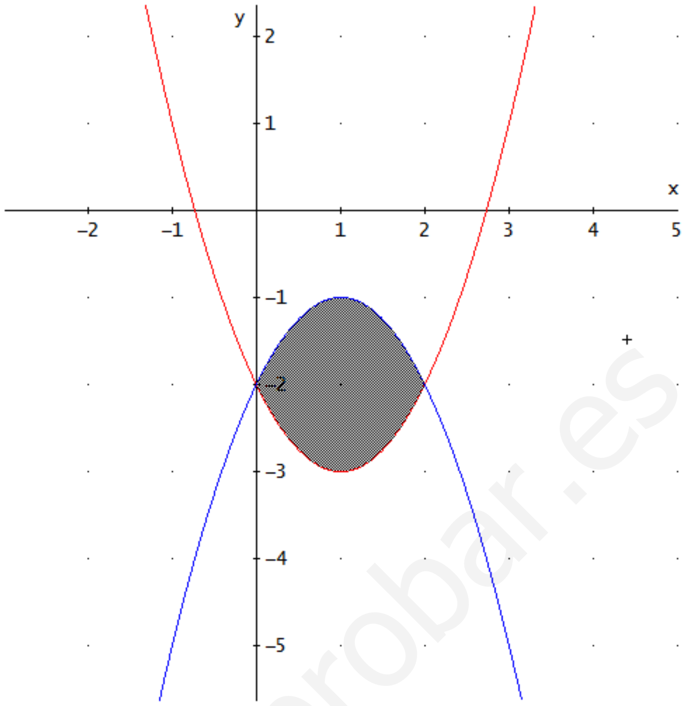
$g(x) = -x^2 + 2x - 2$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = \frac{-2}{2\cdot(-1)} = 1 \\ y_v = -1^2 + 2 - 2 = -1 \end{array}\right\} V(1,-1)$

No corta al eje OX

Tabla

x	0	2
y	-2	-2



b) Puntos de corte de f(x) y g(x)

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = -x^2 + 2x - 2 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

Área

$\boxed{A =} \int_0^2 (g(x) - f(x))\, dx = \int_0^2 ((-x^2 + 2x - 2) - (x^2 - 2x - 2))\, dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\, dx =$

$= -\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{-2\cdot 8}{3} + \frac{4\cdot 4}{2} = \boxed{\frac{8}{3} u^2}$

3A) a) Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ es compatible si, y solo si, el rango de la matriz de los coeficientes, A, es igual al rango de la matriz ampliada, (A|B).

b) $A_{3\times 4} X_{4\times 1} = B$ $\boxed{\text{La dimensión de B es } 3\times 1}$

c) No, ya que solo hay 3 ecuaciones y 4 incógnitas.

d) En principio tenemos dos posibilidades: 1 y 3

Sin embargo, como el rango de la matriz ampliada nunca puede ser menor que el rango de la matriz de coeficientes, el $\boxed{\text{rango de (A|B) es tres.}}$

4A) a) π t.q. $\begin{cases} P \in \pi \\ r \subset \pi \end{cases}$

π está determinado por $\begin{cases} P(1,1,2) \\ \vec{u_r} = \text{vector director de } r \\ \vec{PR} \text{ donde } R \in r \text{ (tomaremos } R(1,0,0)) \end{cases}$

$$\vec{u_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{k} - \vec{j} = (2,-1,1)$$

$$\vec{PR} = (1,0,0) - (1,1,2) = (0,-1,-2)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z-2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{3x + 4y - 2z - 3 = 0 \equiv \pi}$$

b) Llamamos M al punto medio de P y Q.

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{1+1}{2} = 1 \\ y_M = \dfrac{1+1}{2} = 1 \\ z_M = \dfrac{2+0}{2} = 1 \end{array}\right\} M(1,1,1)$$

$$\boxed{d(M,\pi) = \frac{|3\cdot 1 + 4\cdot 1 - 2\cdot 1 - 3|}{\sqrt{3^2+4^2+(-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{29}}{29}\ u}$$