



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, para que la función $f(x) = (x - a)e^x$ tenga un mínimo relativo en $x = 0$. Razona que, de hecho, es un mínimo absoluto. (1,25 puntos)

b) Para el valor de a obtenido, calcula los puntos de inflexión de la función $f(x)$. (1,25 puntos)

2A. Calcula la integral $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx$. (2,5 puntos)

3A. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 4 & k \\ 0 & 5k & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcula en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el rango de la matriz A . (1 punto)

b) ¿Existe algún valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual el sistema $A \cdot X = O$ sea incompatible? (0,75 puntos)

c) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema $A \cdot X = O$ es compatible indeterminado? (0,75 puntos)

4A. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Determina su posición relativa. (1,25 puntos)

b) Halla el ángulo que forman sus vectores de dirección. (1,25 puntos)

(sigue a la vuelta)

Propuesta A

1A.- a) Determinar el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (x-a)e^x$ tenga un mínimo relativo en $x = 0$. Razona que, de hecho, es un mínimo absoluto (**1'25 puntos**)

b) Para el valor de a obtenido, calcula los puntos de inflexión de la función $f(x)$ (**1'25 puntos**)

a)

$$f'(x) = e^x + (x-a)e^x = (x-a+1)e^x \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow (0-a+1)e^0 = 0 \Rightarrow (-a+1) \cdot 1 = 0 \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow a=1$$

$$f''(x) = e^x + e^x + (x-1)e^x = (x-1+2)e^x = (x+1)e^x \Rightarrow f''(0) = (0+1)e^0 = 1 \cdot 1 = 1 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

$$\text{Mínimo relativo en } x=0 \Rightarrow f(0) = (0-1)e^0 = -1$$

Veamos que valores tiene la función en los extremos de ella, al no limitarse el intervalo de búsqueda, en mas y menos infinito, si hay valores menores que $f(0)$ entonces esos son los valores mínimos absolutos.

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \infty \cdot e^\infty > f(0)$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x-1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^x} = -\frac{1}{\infty} = 0 > -1$$

Por lo tanto en $x=0$ hay un mínimo absoluto

b)

$$f''(x) = (x+1)e^x \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow (x+1)e^x = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$f'''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+1+1)e^x = (x+2)e^x \Rightarrow f'''(-1) = (-1+2)e^1 = e \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Punto de inflexión en } x=-1 \Rightarrow f(-1) = (-1-1)e^{-1} = -\frac{2}{e}$$

2A.- Calcula la integral $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx$ (**2'5 puntos**)

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \Rightarrow \text{Por Ruffini} \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 8 & -4 \\ 2 & & 2 & -6 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrr} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0$$

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)}{(x-2)^2}$$

$$A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow A(1-2)^2 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow A = -1 \\ x=2 \Rightarrow C(2-1) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow C = -1 \\ x=0 \Rightarrow 4A + 2B - C = 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 \Rightarrow 4A + 2B - C = 1 \end{cases}$$

$$4 \cdot (-1) + 2B - (-1) = 1 \Rightarrow -4 + 2B + 1 = 1 \Rightarrow 2B = 4 \Rightarrow B = 2$$

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{-1}{(x-2)^2} \Rightarrow I = \int \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx = -\int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{(x-2)^2} =$$

$$\begin{cases} x-1=t \Rightarrow dx=dt \\ x-2=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$I = -\int \frac{dt}{t} + 2 \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u^2} = -\ln t + 2 \ln u - \int u^{-2} du = \ln \frac{u^2}{t} - \frac{1}{(-1)} \cdot u^{-1} = \ln \frac{(x-2)^2}{(x-1)} + \frac{1}{x-2} + K$$

3A.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 4 & k \\ 0 & 5k & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Calcula en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el rango de la matriz **A** (1 punto)
 b) ¿Existe algún valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual el sistema $AX = O$ sea incompatible? (0'75 puntos)
 c) Para que valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema $AX = O$ es compatible indeterminado (0'75 puntos)

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 4 & k \\ 0 & 5k & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & k \\ 0 & 5 & k \\ 0 & 5k & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5k-5 & 1-k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5k-5=0 \Rightarrow 5k=5 \Rightarrow k=1 \\ 1-k=0 \Rightarrow k=1 \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

$$\text{Cuando } k = 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

b)

El sistema queda reducido a tres ecuaciones ya que la tercera es combinación lineal de las otras
 No hay ningún valor de k que haga el sistema incompatible ya que una ecuación homogénea solo tiene soluciones compatibles determinadas o indeterminadas

c)

Cuando $k = 1$, el sistema es compatible indeterminado ya que

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas}$$

Solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 5y + z = 0 \Rightarrow z = -5y \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda, \lambda, -5\lambda)$$

4A.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

a) Determinar su posición relativa. (1'25 puntos)

b) Hallar el ángulo que forman sus vectores directores (1'25 puntos)

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 1 - y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = t \\ \lambda = 1 - t \\ 1 - \lambda = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - t = -1 \\ \lambda + t = 1 \\ \lambda + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Dos filas iguales} \\ s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 2 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Pueden ser rectas coincidentes o cortarse

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow \text{No son proporcionales} \Rightarrow \text{Las rectas se cortan en un punto}$$

b)

$$\cos \alpha =$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow \text{No son proporcionales} \Rightarrow \text{Las rectas se cortan en un punto}$$

b)

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{|(1, 1, -1) \cdot (1, -1, 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{|-1|}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70^\circ 31' 44''$$

PROPUESTA B

1B. a) Enuncia el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle. (1 punto)

b) Demuestra que la ecuación $e^x + x^7 = 0$ tiene al menos una solución real. (0,75 puntos)

c) Demuestra que, de hecho, dicha solución es única. (0,75 puntos)

2B. Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Calcula el valor del parámetro a para que el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sea $\frac{32}{3}$. (2,5 puntos)

3B. a) Clasifica, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y = -1 \\ x + 2y + mz = m + 3 \end{cases}$$

(1,5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $m = 7$. (1 punto)

4B. Consideremos el plano $\pi \equiv x - ky = 0$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

a) Halla el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que el plano π y la recta r sean paralelos. (1,5 puntos)

b) Para el valor de k obtenido, calcula la distancia desde la recta r al plano π . (1 punto)

Propuesta B**1B.- a) Enuncia el teorema de Bolzano y el de Rolle (1 punto)****b) Demuestra que la ecuación $e^x + x^7 = 0$ tiene al menos una solución real (0'75 puntos)****c) Demuestra, que de hecho, esa solución es única (0'75 puntos)**

a)

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f(b)]$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y que verifica que $f(a) = f(b)$; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

b)

Sea $f(x) = e^x + x^7$, sabemos que esta función es continua en todo su dominio que es la recta real y el intervalo, entre otros, $[-1, 1]$ toma valores, en los extremos de dicho intervalo:

$$f(-1) = e^{-1} + (-1)^7 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0 \quad \text{y} \quad f(1) = e^1 + 1^7 = 1 + e > 0$$

con signo diferentes, $[\text{sign } f(-1) \neq \text{sign } f(1)]$, por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$ que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que $e^c + c^7 = 0$

c)

Comprobemos que la función $f(x) = e^x + x^7$ únicamente puede tener una raíz real

La función $f(x) = e^x + x^7$ es continua en toda la recta real, y los valores en sus extremos son:

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x^7) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^{-x} + (-x)^7] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x} - x^7 \right) = \frac{1}{e^\infty} - \infty^7 = 0 - \infty = -\infty < 0 \quad \text{y}$$

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x^7) = e^\infty + \infty^7 = \infty + \infty = \infty > 0 \quad \text{con signo diferentes, } [\text{sign } f(-\infty) \neq \text{sign } f(\infty)], \text{ por lo}$$

tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $c \in (-\infty, \infty)$ tal que $f(c) = 0$ que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que $e^c + c^7 = 0$.

Veamos ahora mediante el teorema de Rolle y trabajando por reducción al absurdo que esta raíz es única.

Supongamos que $f(x)$ tiene dos raíces c y d , tales que $f(c) = f(d) = 0$

Como $f(x)$ es una función exponencial y polinómica, es continua y derivable en toda la recta real, o sea en el intervalo $[c, d]$ y además toma el mismo valor en los extremos de dicho intervalo por lo que aplicando el teorema de Rolle, tenemos que existe, al menos, un punto $x_0 \in (c, d)$ tal que $f'(x_0) = 0$

La derivada de esta función es $f'(x) = e^x + 7x^6$; así, para determinar el punto x_0 tendremos que igualar su derivada a cero, y además teniendo en cuenta que $e^x > 0$ para todo valor de la recta real tenemos:

$$e^x + 7x^6 = 0 \Rightarrow 7x^6 = -e^x \Rightarrow x^6 = -\frac{e^x}{7} \Rightarrow x = \sqrt[6]{-\frac{e^x}{7}} \Rightarrow \text{Sin solución.}$$

Esta ecuación no tiene solución en el campo de los números reales, por lo tanto hemos obtenido una contradicción y así, no es posible que la función tenga dos raíces en todo el campo de los números reales quedando demostrado que solo tiene una raíz real en el intervalo $(-\infty, \infty)$ tal como queríamos demostrar

2.B.- Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$ con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Calcular el valor del parámetro a para que el área encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sea $\frac{32}{3}$ (2'5 puntos)

$$\text{Punto de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{a} \\ x = \sqrt{a} \end{cases}$$

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} a \, dx - \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} x^2 \, dx = \frac{32}{3} \Rightarrow a \cdot [x]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} - \frac{1}{3} [x^3]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = \frac{32}{3} \Rightarrow a \cdot [\sqrt{a} - (-\sqrt{a})] - \frac{1}{3} [(\sqrt{a})^3 - (-\sqrt{a})^3] = \frac{32}{3}$$

$$2a\sqrt{a} - \frac{1}{3} 2a\sqrt{a} = \frac{32}{3} \Rightarrow \frac{6a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a}}{3} = \frac{32}{3} \Rightarrow 4a\sqrt{a} = 32 \Rightarrow a\sqrt{a} = 8 \Rightarrow (a\sqrt{a})^2 = 8^2 \Rightarrow a^2 a = 64 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = \sqrt[3]{64} = 4$$

3B.- a) Clasifica, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y = -1 \\ x + 2y + mz = m + 3 \end{cases}$$

(1'5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $m = 7$ (1 punto)

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = -3m + 4 + 3 + 2m = -m + 7 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -m + 7 = 0 \Rightarrow m = 7$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{7\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $m = 7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & 10 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{La tercera ecuación es combinación lineal de}$$

las otras dos $\Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

b)

Si $m = 7 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow y + 2z = 3 \Rightarrow y = 3 - 2z \Rightarrow x - (3 - 2z) + z = 1 \Rightarrow x - 3 + 3z = 1 \Rightarrow x = 4 - 3z$$

Solución $\Rightarrow (x, y, z) = (4 - 3\lambda, 3 - 2\lambda, \lambda)$

4.B.- Consideremos el plano $\pi \equiv x - ky = 0$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

- a) Halla el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que el plano π y la recta r sean paralelos **(1'5 puntos)**
 b) Para el valor de k obtenido, calcula la distancia desde la recta r al plano π **(1 punto)**

a) El producto escalar de los vectores directores de la recta y el plano es nulo ya que son perpendiculares

$$x = 1 + y \Rightarrow 1 + y + y - z = 3 \Rightarrow 2y - z = 2 \Rightarrow z = 2y - 2 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ \vec{v}_\pi = (1, -k, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow (1, 1, 2) \cdot (1, -k, 0) = 0 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$$

b) La distancia de la recta al plano es la de cualquiera de uno de sus puntos R al plano (tomaremos el indicado en la ecuación)

$$x = 1 + y \Rightarrow 1 + y + y - z = 3 \Rightarrow 2y - z = 2 \Rightarrow z = 2y - 2 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ \vec{v}_\pi = (1, -k, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow (1, 1, 2) \cdot (1, -k, 0) = 0 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$$

$$\begin{cases} R(1, 0, -2) \\ \pi \equiv x - y = 0 \end{cases}$$

$$d(r, \pi) = d(R, \pi) = \frac{|1 - 0|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$