



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. **(0,5 puntos)**

b) Encuentra el punto de la función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 30x + 1$ en el que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ es mínima. Encuentra también el punto donde la pendiente es máxima. **(2 puntos)**

2A. Encuentra una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

tal que $F(0) = 5$. **(2,5 puntos)**

3A. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$$

a) Calcula $A \cdot A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de A . **(1 punto)**

b) Razona que siempre existe la matriz inversa de A , independientemente de los valores $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$. **(1,5 puntos)**

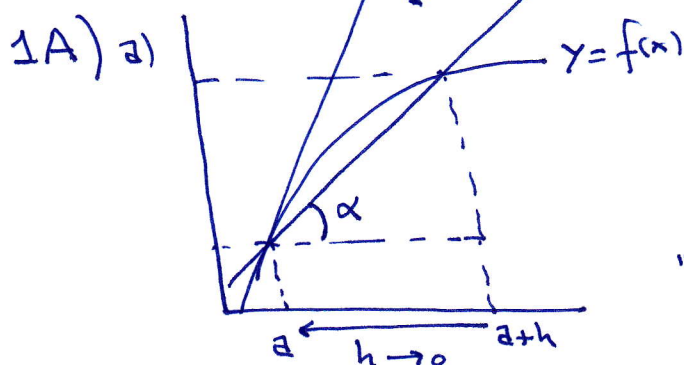
4A. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$:

a) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares. **(1 punto)**

b) Para el valor de λ obtenido en el apartado anterior, obtén unas ecuaciones paramétricas de la recta r paralela a π_1 y a π_2 que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$. **(1,5 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Propuesta A



$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \operatorname{tg} \alpha = m_{\text{secantes}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) = m_{\text{recta tangente}}$$

"La derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto"

b) $m_{\text{recta tangente}} = f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x + 30 = g(x)$

Queremos optimizar $g(x)$:

$$g'(x) = 12x^2 - 48x + 36$$

$$g''(x) = 24x - 48$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 48x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

$$g''(1) = -24 < 0 \Rightarrow x = 1 \text{ es un m\u00e1x. relativo}$$

$$g''(3) = 24 > 0 \Rightarrow x = 3 \text{ " " m\u00edn. relativo}$$

La pendiente es m\u00ednima en $x=3$ y m\u00e1xima en $x=1$.

2A) \u00bf $F(x)$ primitiva de $f(x) = (x^2+1)e^x$ t.q. $F(0)=5$?

$$\int (x^2+1)e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2+1 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right] = (x^2+1)e^x - \int 2xe^x dx =$$

$$= (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C = F(x)$$

$$\int 2xe^x dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x \rightarrow du = 2 dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{array} \right] = 2xe^x - \int 2e^x dx =$$

$$= 2xe^x - 2e^x$$

$$F(0) = (0^2+1)e^0 - 2 \cdot 0 \cdot e^0 + 2 \cdot e^0 + C = 3 + C = 5 \Rightarrow C = 2$$

$$F(x) = \int (x^2+1)e^x dx = (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + 2$$

$$3A) A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad a, b \neq 0$$

$$a) AA^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ -b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$b) \exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & -b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & -b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b \\ a & b & 0 \\ -b & a & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot a^3 - b \cdot (-b^3) = a^4 + b^4 \neq 0 \text{ ya que } a \neq 0 \text{ y } b \neq 0.$$

$$4A) \pi_1 \equiv x - 2y - z = 0$$

$$\pi_2 \equiv 2x - y + \lambda z = 4$$

$$a) \text{ ¿ } \lambda : \pi_1 \perp \pi_2 ?$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_{\pi_1} = (1, -2, -1) \\ \vec{n}_{\pi_2} = (2, -1, \lambda) \end{array} \right\} \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1, -2, -1) \cdot (2, -1, \lambda) = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 + \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -4}$$

b) La recta que nos piden está determinada por $P(1, 2, 3)$ y el vector director $\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$.

$$\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 4\vec{k} + \vec{i} + 4\vec{j} =$$

$$= 9\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} = (9, 6, 3)$$

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 9\mu \\ y = 2 + 6\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}}$$

ii No usar λ , ya que se ha usado en el apartado anterior para otra cosa !!

Propuesta B

1B) ¿ $a > 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}}$?

• $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}} = e^{-1} \quad (*)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x - (1+x)}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} = \\ &= \frac{-2}{1+1} = -1 \end{aligned}$$

• $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{a}{x^2} \ln(\cos 2x)} =$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x^2} \ln(\cos 2x)} = e^{-2a} \quad (**)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x^2} \ln(\cos 2x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \ln(\cos 2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \frac{-2 \sin(2x)}{\cos(2x)}}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2a \tan(2x)}{2x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{4a}{\cos^2(2x)}}{2} = -2a \end{aligned}$$

• De (*) y (**): $e^{-1} = e^{-2a} \Rightarrow -1 = -2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$

2B) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

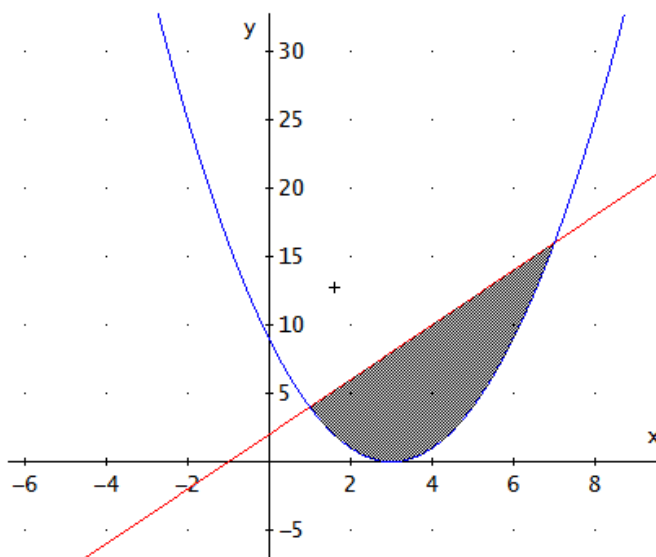
Vértice: $x_v = \frac{6}{2} = 3$
 $y_v = 0$ } $V(3, 0)$

Tabla

x	1	5
y	4	4

$g(x) = 2x + 2$

x	y
0	2
2	6





PROPUESTA B

1B. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que se verifique la igualdad

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{a}{x^2}} \quad \text{(2,5 puntos)}$$

2B. a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 9$ y la recta $g(x) = 2x + 2$.
(0,5 puntos)

b) Calcula el área de la región anterior. (2 puntos)

3B. Un grupo de amigos se reúne cada sábado en la misma cafetería. Hace dos sábados tomaron 4 cafés, 6 refrescos y 2 infusiones, siendo el precio total 15,40 euros. El sábado pasado tomaron 5 cafés, 4 refrescos y 3 infusiones, siendo el precio total 14,40 euros. Hoy sábado han pedido 3 cafés, 8 refrescos y 1 infusión. Cuando piden la cuenta, el camarero les dice que el precio total es 18 euros.

Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales con los datos del enunciado anterior. (1 punto)

b) Asumiendo que los dos sábados anteriores los precios totales estaban bien calculados y que los precios de los cafés, refrescos e infusiones no han cambiado, razona que hay un error en la cuenta de este sábado. (1,5 puntos)

4B. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x}{2} = y + 1 = \frac{z - 1}{3}, \quad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Estudia su posición relativa. (1,25 puntos)

b) Calcula la distancia entre r y s . (1,25 puntos)

b) Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 2x + 2 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

Área

$$\begin{aligned} A &= \int_1^7 [(2x+2) - (x^2-6x+9)] dx = \int_1^7 (-x^2 + 8x - 7) dx = \\ &= \left. -\frac{x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 7x \right|_1^7 = \left(-\frac{7^3}{3} + \frac{8 \cdot 7^2}{2} - 7 \cdot 7 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{8 \cdot 1^2}{2} - 7 \cdot 1 \right) = \\ &= \boxed{36 u^2} \end{aligned}$$

3B) a) x = precio de un café
 y = " de un refresco
 z = " de una infusión

$$\begin{cases} 4x + 6y + 2z = 15,40 \\ 5x + 4y + 3z = 14,40 \\ 3x + 8y + z = 18 \end{cases}$$

b) Para razonar que hay un error, vamos a demostrar que el sistema es incompatible

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 2 & 15,40 \\ 5 & 4 & 3 & 14,40 \\ 3 & 8 & 1 & 18 \end{array} \right) & \xrightarrow{F_1:4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 7,70 \\ 5 & 4 & 3 & 14,40 \\ 3 & 8 & 1 & 18 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} -5F_1+F_2 \\ -3F_1+F_3 \end{matrix}} \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 7,70 \\ 0 & -7/2 & 1/2 & -29,1 \\ 0 & 7/2 & -1/2 & -5,1 \end{array} \right) & \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 7,70 \\ 0 & -7/2 & 1/2 & -29,1 \\ 0 & 0 & 0 & -29,2 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = -29,2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Sistema incompatible.

4B) $r \equiv \frac{x}{2} = y+1 = \frac{z-1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$

a) Posición relativa

$$r \equiv \frac{x}{2} = y+1 = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = y+1 \Rightarrow x - 2y - 2 = 0 \\ \frac{x}{2} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow 3x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$s \equiv x = y = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} x = y \Rightarrow x - y = 0 \\ x = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow -x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 3$$

$$|\tilde{M}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 4$$

Por tanto, r y s se cruzan.

$$b) d(r, s) = \left| \frac{\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_s P_r})}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} \right|$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_r = (2, 1, 3) & \quad \overrightarrow{P_s P_r} = (0, -1, 1) - (0, 0, 1) = (0, -1, 0) \\ \vec{u}_s = (1, 1, -1) & \quad \begin{matrix} P_r(0, -1, 1) \\ P_s(0, 0, 1) \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k} = (-4, 5, 1)$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{42}$$

$$\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_s P_r}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

Por tanto:

$$\boxed{d(r, s) = \left| \frac{-5}{\sqrt{42}} \right| = \frac{5\sqrt{42}}{42} u}$$