



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

- 1A.** a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange y da su interpretación geométrica. **(1 punto)**
 b) Calcula un punto del intervalo $[0, 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ sea paralela a la cuerda (o segmento) que une los puntos de la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$ y $x = 2$. **(1,5 puntos)**

- 2A.** Calcula la integral

$$\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx \quad \textbf{(2,5 puntos)}$$

- 3A.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) Calcula A^n cuando $n \in \mathbb{N}$ es par. **(0,75 puntos)**
 b) Resuelve la ecuación matricial $6A^{20}X = B - 3AX$, donde X es una matrix cuadrada de orden 3. (Indicación: Sustituye de inicio el valor de A^{20} para facilitar los cálculos) **(1,75 puntos)**

- 4A.** Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3}, \quad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- a) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que r y s se corten en un punto. Da dicho punto de corte. **(1,25 puntos)**
 b) Para el valor de a obtenido, calcula la ecuación general del plano π que contiene a r y s . **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

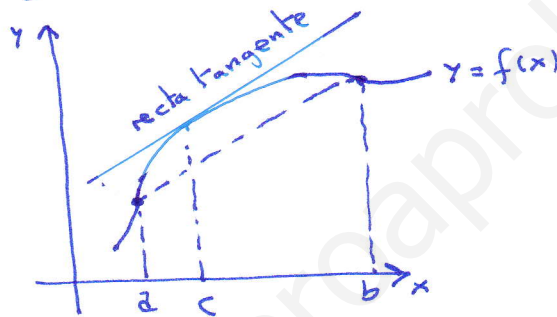
Propuesta A1A) Teorema del valor medio de Lagrange

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces

$$\exists c \in (a, b) \text{ t.q. } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Interpretación geométrica

Si se cumplen las hipótesis del teorema, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ en el que su recta tangente es paralela al segmento determinado por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.



b) La función $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$, luego vamos a aplicar el TVM de Lagrange a f en dicho intervalo.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(2) = 17 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{17 - 1}{2} = \frac{16}{2} = 8 \quad \left. \begin{array}{l} f'(c) = 6c + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 6c + 2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6c = 6 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$2A) \int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx$$

Factorizamos el denominador

$$x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 0 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{Ax^2 + Bx(x+1) + C(x+1)}{(x+1)x^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (igualando los numeradores y dándole valores a x):

$$Ax^2 + Bx(x+1) + C(x+1) = x+2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow C=2 \\ x=-1 \Rightarrow A=1 \\ x=2 \Rightarrow 4A+6B+3C=4 \Rightarrow B=-1 \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2}$$

Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx &= \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \ln|x+1| - \ln|x| + 2 \int x^{-2} dx = \ln|x+1| - \ln|x| + 2 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \\ &= \ln|x+1| - \ln|x| - \frac{2}{x} + C \end{aligned}$$

$$3A) a) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I$$

Por tanto, $A^n = I$ cuando n es par

$$b) 6A^{20}X = B - 3AX$$

Como $A^{20} = I$ se tiene: $6X = B - 3AX \Rightarrow 6X + 3AX = B \Rightarrow$

$$\Rightarrow (6I + 3A)X = B \Rightarrow (6I + 3A)^{-1} (6I + 3A)X = (6I + 3A)^{-1} B \Rightarrow$$

↑
Cuidado

$$\Rightarrow X = (6I + 3A)^{-1} B$$

Calculamos $6I + 3A$

$$6I + 3A = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculamos $(6I + 3A)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1:3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

(2)

$$\xrightarrow{-6F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2: 9 \\ F_3: (-9)}]{\substack{F_2: 9 \\ F_3: (-9)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 0 & 2/9 \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_3 + F_1} \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 0 & 2/9 \end{array} \right) \Rightarrow (6I + 3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$$

Calculamos X

$$\boxed{X = (6I + 3A)^{-1} B = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

$$4A) \quad r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3}, \quad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Para calcular a de forma que se corten en un punto lo que hay que hacer es resolver el sistema formado por las ecuaciones de r y s :

$$\begin{aligned} r &\equiv \begin{cases} x = -1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 1 + 3\mu \end{cases} \\ s &\equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 + 2\mu = \lambda \\ \mu = a + \lambda \\ 1 + 3\mu = -\lambda \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda - 2\mu = -1 \\ \lambda - \mu = -a \\ \lambda + 3\mu = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda - 2\mu = -1 \\ -\lambda - 3\mu = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\mu = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\mu = 0}} \Rightarrow \lambda - 2 \cdot 0 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -1}} \Rightarrow -1 + 0 = a \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

El punto de corte de r y s es:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2 \cdot 0 \\ y = 0 \\ z = 1 + 3 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(-1, 0, 1)}$$

b) El plano π que nos piden está determinado por $\vec{u}_r = (2, 1, 3)$, $\vec{u}_s = (1, 1, -1)$ y $\overrightarrow{PG}$ donde P es el punto de intersección de r y s , y G es un punto genérico: $\overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (-1, 0, 1) = (x+1, y, z-1)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{4x - 5y - z + 5 = 0 \equiv \pi}$$



PROPUESTA B

1B. Sabiendo que la función

$$f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + 1}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

tiene un punto crítico en $(1, 1)$, calcula a y b y demuestra que el punto crítico es un máximo. **(2,5 puntos)**

2B. a) Esboza la región encerrada entre el eje de abscisas y las parábolas $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2 - 4x + 4$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} mx & + & z & = & 1 \\ & my & + & z & = & m \\ -mx & - & my & + & (m+1)z & = & -m-1 \end{cases} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4B. Dados el plano $\pi \equiv y - z = 3$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Estudia la posición relativa de π y r . **(1,25 puntos)**

b) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s paralela a π que corta a r perpendicularmente en el punto $P(0, 1, -1)$. **(1,25 puntos)**

Propuesta B

1B) $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$, $a, b \in \mathbb{R}$

f tiene un punto crítico (punto en el que $f' = 0$) en $(1, 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - (ax+b)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-a - 2b + a}{2^2} = 0 \Rightarrow \frac{-2b}{4} = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{-2b}{4} = 0} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}}$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1 \Rightarrow a+b = 2$$

Por tanto, $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

Ahora hay que comprobar que $x=1$ es un máximo relativo:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x(x^2+1)^2 - (-2x^2+2)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow \boxed{x=1 \text{ es un m\u00e1x. relativo de } f.}$$

2B) a) $f(x) = x^2$

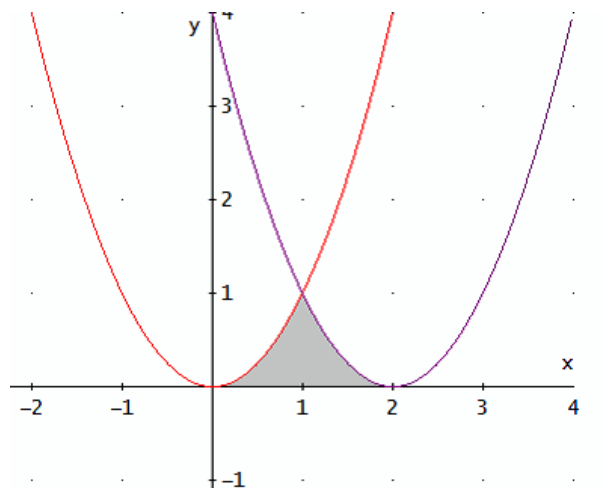
$$\text{V\u00e9rtice: } \begin{cases} x_v = 0 \\ y_v = 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x_v = 0 \\ y_v = 0 \end{cases}} \right\} V(0,0)$$

$$\text{Tabla: } \begin{array}{c|cccc} x & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline y & 4 & 1 & 1 & 4 \end{array}$$

$$g(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$\text{V\u00e9rtice: } \begin{cases} x_v = \frac{4}{2} = 2 \\ y_v = 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} x_v = 2 \\ y_v = 0 \end{cases}} \right\} V(2,0)$$

$$\text{Tabla: } \begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline y & 4 & 4 \end{array}$$



Puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow -4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Area

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 + \left. \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x \right|_1^2 = \\ &= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + \left[\left(\frac{2^3}{3} - \frac{4 \cdot 2^2}{2} + 4 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{4 \cdot 1^2}{2} + 4 \cdot 1 \right) \right] = \\ &= \frac{2}{3} u^2 \end{aligned}$$

$$3B) \begin{cases} mx + z = 1 \\ my + z = m \\ -mx - my + (m+1)z = -m-1 \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -m & -m & m+1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 & m \\ -m & -m & m+1 & -m-1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = m^2(m+3) \Rightarrow |M| = 0 \Leftrightarrow m = \begin{cases} 0 \\ -3 \end{cases}$$

Si $m \neq 0, -3 \Rightarrow \text{rango } M = \text{rango } \tilde{M} = 3 = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ sistema compatible determinado.

Si $m = -3$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \text{rango } M = \text{rango } \tilde{M} = 2 < 3 = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ sistema compatible indeterminado

Si $m = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1 + F_3]{-F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow 0z = -2 \quad \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

b) Si $m = -3$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} [1] \\ [2] \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{De } [2]: -3y + z = -3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}z + 1 \\ \text{Sustituimos en } [1]: -3x + z = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Hacemos $z = \lambda \in \mathbb{R}$. Las soluciones son $(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\lambda + 1, \lambda \right)$

$$4B) \pi \equiv y - z = 3, \quad r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Posición relativa

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_\pi = (0, 1, -1) \\ \vec{u}_r = (2, 1, 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \pi \equiv y - z - 3 = 0 \\ \text{Sustituimos } \vec{u}_r = (2, 1, 1) \text{ en la ec. del plano:} \\ 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{sustituimos } P(0, 1, -1) \in r \text{ en la ec.} \\ \text{completa del plano } 1 - 1 - 3 \neq 0 \Rightarrow \underline{r \text{ y } \pi \text{ son paralelos}} \end{array}$$

De otra forma: mediante rangos

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = y-1 \Rightarrow x - 2y + 2 = 0 \\ \frac{x}{2} = z+1 \Rightarrow x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right), \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} |M| = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } \tilde{M} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{r \text{ y } \pi \text{ son paralelos}}$$

b) La recta s que nos piden está determinada por $P(0, 1, -1)$ y el vector director $\vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r$

$$\vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k} = (2, -2, -2)$$

Unas ecuaciones paramétricas de s son:

$$s \equiv \begin{cases} x = +2\mu \\ y = 1 - 2\mu \\ z = -1 - 2\mu \end{cases} \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R}$$