Junio 2012

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Dada la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

calcula los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ sabiendo que:

- la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$ tiene pendiente -3
- $f(x)$ tiene un punto de inflexión de coordenadas $(1, 2)$.

(2,5 puntos)

2A. a) Esboza la región encerrada entre la parábola $f(x) = x^2 - 1$ y la recta $g(x) = 5 - x$. **(0,5 puntos)**
b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ mx & + & (m+1)y & + & (m-1)z & = & m-2 \\ 3x & + & (m+3)y & + & 4z & = & m-2 \end{array}\right.$$

(1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado. **(1 punto)**

4A. a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes de coordenadas. **(1,25 puntos)**
b) Si llamamos A, B y C a los vértices del triángulo del apartado anterior, encuentra el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro de vértices A, B, C y $D(-\lambda^2, 2 + \lambda, -3)$ tenga volumen mínimo. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Junio 2012

Propuesta A

1A) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

- $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

  $f'(-1) = 3 - 2a + b = -3 \Rightarrow \boxed{-2a + b = -6}$

- $f''(x) = 6x + 2a$

  $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{-2a}{6} = -\frac{1}{3}a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -3}$

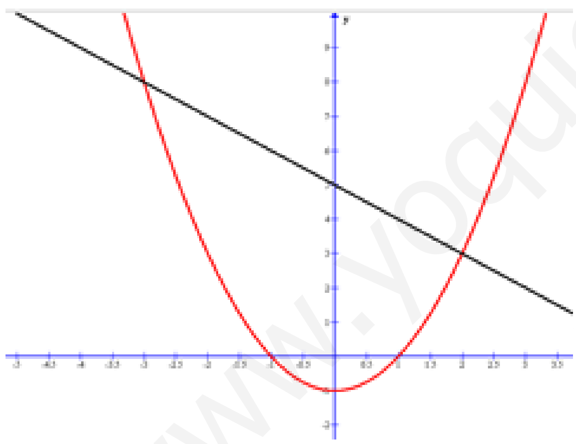
- $\left\{\begin{array}{l} -2a + b = -6 \\ a = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b = -12}$

- Como $(1, 2)$ pertenece a la gráfica de f, $f(1) = 2 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 1^3 - 3 \cdot 1^2 + (-12) \cdot 1 + c = 2 \Rightarrow \boxed{c = 16}$

- Así, $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 - 12x + 16}$

2A) a)



$f(x) = x^2 - 1$

- Vértice:

  $x_v = -\frac{b}{2a} = 0$

  $y_v = -1$

  $V(0, -1)$

- Puntos de corte con OX

  $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

  $\Rightarrow (-1, 0)$ y $(1, 0)$

$g(x) = 5 - x$

x	y
0	5
1	4

b) Puntos de corte entre las funciones

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 1 = 5 - x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \left\{\begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array}\right.$

Área

$$\boxed{A} = \int_{-3}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx = \int_{-3}^{2} (5 - x - x^2 + 1)\,dx = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx =$$

$$= 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_{-3}^{2} = 6 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} - \left(6 \cdot (-3) - \frac{(-3)^2}{2} - \frac{(-3)^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{22}{3} - \left(-\frac{27}{2}\right) = \boxed{\frac{125}{6}\ u^2}$$

3A $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ mx+(m+1)y+(m-1)z=m-2 \\ 3x+(m+3)y+4z=m-2 \end{cases}$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ m & m+1 & m-1 & m-2 \\ 3 & m+3 & 4 & m-2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{-mF_1+F_3 \\ -3F_1+F_4}]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & m-2 \\ 0 & m & +1 & m-2 \end{array}\right) \xrightarrow[-mF_2+F_4]{-F_2+F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & m-2 \\ 0 & 0 & 1-2m & m-2 \end{array}\right) \xrightarrow{(1-2m)F_3+3F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & m-2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}m^2+\frac{8}{3}m-\frac{8}{3} \end{array}\right) [4]$$

De [4]: $-2m^2+8m-8=0 \Rightarrow m=2$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Discusión:}} \\ \text{Si } m\neq 2 \Rightarrow \text{rango}(A)=3<4=\text{rango}(A|B) \Rightarrow \text{Sistema incompatible} \\ \text{Si } m=2 \Rightarrow \text{rango}(A)=3=\text{rango}(A|B)=\text{nº de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.D.} \end{array}}$$

b) $m=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ Sistema homogéneo} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}(x,y,z)=(0,0,0) \\ \text{Solución trivial}\end{array}}$$

4A a) Puntos de corte con los ejes:

$$OX \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \mu-0+3\cdot 0=-3 \Rightarrow \mu=-3 \Rightarrow A\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow A(-3,0,0)$$

$$OY \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 0-\alpha+3\cdot 0=-3 \Rightarrow \alpha=3 \Rightarrow B\begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow B(0,3,0)$$

$$OZ \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow 0-0+3\lambda=-3 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow C\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$$

Área

$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|$$

$$\vec{AB} = (0,3,0) - (-3,0,0) = (3,3,0)$$

$$\vec{AC} = (0,0,-1) - (-3,0,0) = (-3,0,-1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 9\vec{k} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = (-3,9,3)$$

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 9^2 + 3^2} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

$$A = \frac{1}{2} 3\sqrt{11} = \boxed{\frac{3\sqrt{11}}{2} u^2}$$

b) $$V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})\right|$$

$$\vec{AD} = (-\beta^2, 2+\beta, 3) - (-3,0,0) = (3-\beta^2, 2+\beta, 3)$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left| \det\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3-\beta^2 & 2+\beta & 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left| -3(3-\beta^2) + 3(2+\beta) + 27\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|-9 + 3\beta^2 + 6 + 3\beta + 27\right| = \frac{1}{6}\left|3\beta^2 + 3\beta + 24\right|$$

$\left.\begin{array}{l} 3\beta^2 + 3\beta + 24 = 0 \text{ no tiene soluciones reales} \\ \text{y para } \beta = 0 \Rightarrow 24 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{6}(3\beta^2 + 3\beta + 24)$

Hay que minimizar $f(\beta) = \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2}\beta + 4$

$$f'(\beta) = \frac{1}{2}2\beta + \frac{1}{2}$$

$$f'(\beta) = 0 \Rightarrow \beta + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

$$f''(\beta) = 1$$

$f''(-\frac{1}{2}) > 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$ es un mínimo (relativo)

$\boxed{\text{El volumen del tetraedro es mínimo para } \beta = -\frac{1}{2}}$

(donde $\beta = \lambda$)

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. La concentración (en %) de nitrógeno de un compuesto viene dada, en función del tiempo $t \in [0, +\infty)$ medido en segundos, por la función

$$N(t) = \frac{60}{1+2e^{-t}}$$

a) Comprueba que la concentración de nitrógeno crece con el tiempo. ¿Para qué $t \in [0, +\infty)$ la concentración de nitrógeno es mínima y cuál es esta concentración? **(1,25 puntos)**

b) ¿A qué valor tiende la concentración de nitrógeno cuando el tiempo tiende a infinito? **(1,25 puntos)**

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx \qquad \int \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)\,dx$$

(1,25 puntos por integral)

3B. a) Sean A y B matrices cuadradas de orden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tales que B es la inversa de A:

- Si $|A| = 3$, razona cuánto vale $|B|$.
- ¿Cuál es el rango de B?

(0,75 puntos)

b) Calcula el determinante de la matriz cuadrada X de orden 3 que verifica

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 10 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(1,75 puntos)

4B. Dados el plano $\pi \equiv 2x - z = 6$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + az = 4 \end{cases}$$

a) Encuentra el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que π y r sean paralelos. **(1,25 puntos)**

b) Para el valor de a del apartado anterior, da la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π. **(1,25 puntos)**

Propuesta B

1B a) $N(t)=\dfrac{60}{1+2e^{-t}}$ $t\in[0,+\infty)$

$$N'(t)=\frac{-60(-2e^{-t})}{(1+2e^{-t})^2}=\frac{120e^{-t}}{(1+2e^{-t})^2}$$

$$N'(t)=0 \Rightarrow 120e^{-t}=0 \Rightarrow e^{-t}=0 \quad y \ \nexists t\in[0,+\infty) \ t.q. \ e^{-t}=0$$

Así, la concentración es mínima para $t=0$ (ya que $N'(t)>0 \ \forall t\in[0,+\infty)$) y dicha concentración es del $N(0)=\dfrac{60}{1+2}=20\ \%$

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{60}{1+2e^{-t}}=60$ ya que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}=0$

La concentración de nitrógeno tiende al 60%.

2B a) $\displaystyle\int\frac{1}{4+9x^2}\,dx=\int\frac{1}{4\left(1+\frac{9}{4}x^2\right)}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}\,dx=$

$$=\frac{1}{4}\frac{2}{3}\int\frac{\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2}\,dx=\boxed{\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}x\right)+C}$$

b) $\displaystyle\int\left(\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}\right)dx=\int\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\,dx+\int\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\,dx=\boxed{-\log(\cos x)+\log(\operatorname{sen}x)+C}$

donde log es el logaritmo natural.

3B a) Como $B=A^{-1}$ se tiene que $AB=I \Rightarrow |AB|=|I| \Rightarrow$

$\Rightarrow |A|\,|B|=1 \Rightarrow \boxed{|B|=\dfrac{1}{|A|}=\dfrac{1}{3}}$

Por otra parte, como $|A|=3\neq 0$ y $|B|\neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{rango}(A)=\text{rango}(B)=n\in\mathbb{N}}$

b) $\begin{pmatrix}1&-2&8\\0&10&-3\\0&7&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&7\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&-2&8\\0&10&-3\\0&7&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&7\end{pmatrix}$

Calculamos la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2:10} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-7F_2+F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 0 & -7/10 & 0 \\ 0 & 0 & 21/10 & 0 & -7/10 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{10}{21}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/10 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{3}{10}F_3+F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array}\right) \xrightarrow{-8F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 8/3 & -80/21 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_2+F_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 8/3 & -74/21 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 10/21 \end{array}\right)$$

Cálculo de X

$$\boxed{X} = \begin{pmatrix} 1 & 8/3 & -74/21 \\ 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & -1/3 & 10/21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 8 & -74/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10/3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{|X|} = \det \begin{pmatrix} 1 & 8 & -74/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 10/3 \end{pmatrix} \boxed{= 1}$$

4B a) Para que $\pi \parallel r$, el vector normal de π y el vector director de r tienen que ser perpendiculares: $\vec{n}_\pi \perp \vec{u}_r \Leftrightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = 0$

$$y = -z \Rightarrow x + z + az = 4 \Rightarrow x + z(1+a) = 4 \Rightarrow x = 4 - (1+a)z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 4 - (1+a)\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_r = (-1-a, -1, 1)$$

$$\begin{cases} \vec{n}_\pi = (2, 0, -1) \\ \vec{u}_r = (-1-a, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = -2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}$$

b) $\pi' \begin{cases} \vec{u}_r \\ \vec{n}_\pi \\ \vec{RG} \end{cases}$ donde $R \in r$ cualquiera y G un punto de π'

$\vec{RG} = (x, y, z) - (4, 0, 0) = (x-4, y, z)$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y & z \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -y - 4z - 2(x-4) - 4y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-4) - 5y - 4z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x + 5y + 4z - 8 = 0}$$