



Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Razona que existe al menos un punto en el intervalo $(1, 2)$ donde la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ tiene pendiente nula. **(1,5 puntos)**

2A. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el área de la región comprendida entre las gráficas de las parábolas $f(x) = -x^2 + a^2$ y $g(x) = -4x^2 + 4a^2$ sea 32 unidades de superficie. **(2,5 puntos)**

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X = I_3 - 2B \cdot X$, donde I_3 es la matriz identidad de orden 3 y A , B y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1,25 puntos)**

b) Calcula X , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1,25 puntos)}$$

4A. Dados los planos $\pi \equiv ax + 2y + z = 4$, $a \in \mathbb{R}$, y $\pi' \equiv 2x - 4y - 2z = b$, $b \in \mathbb{R}$:

a) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' coincidentes. **(1 punto)**

b) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' paralelos no coincidentes. **(0,75 puntos)**

a) Razona para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ son π y π' perpendiculares. **(0,75 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Propuesta A1A) Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a)=f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b)$ t.q. $f'(c)=0$.

b) La función $f(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (por ser una función polinómica), luego en particular, es continua en $[1,2]$ y derivable en $(1,2)$. Además

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^5 + 3 \cdot 1^4 - 5 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 12 = 0 = \\ &= 2^5 + 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 12 = f(2) \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Rolle, $\exists c \in (1,2)$ t.q. $f'(c)=0$, esto es, en c la pendiente de la recta tangente es nula.

2A) Puntos de corte entre las funciones

$$-x^2 + a^2 = -4x^2 + 4a^2 \Rightarrow -3x^2 + 3a^2 = 0 \Rightarrow x = a^2 \Rightarrow x = \pm a$$

Como $0 \in (-a, a)$:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= a^2 \\ g(0) &= 4a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(x) > f(x)$$

Área (hay que tener en cuenta que $a > 0$)

$$\begin{aligned} 32 &= \int_0^a [g(x) - f(x)] dx = \int_0^a [-4x^2 + 4a^2 - (-x^2 + a^2)] dx = \\ &= \int_0^a (-3x^2 + 3a^2) dx = \left[-3 \frac{x^3}{3} + 3a^2 x \right]_0^a = -a^3 + 3a^3 = 2a^3 = 32 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^3 = 16 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

$$(3A) \ a) AX = I - 2BX \Rightarrow AX + 2BX = I \Rightarrow (A + 2B)X = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A + 2B)^{-1} (A + 2B)X = (A + 2B)^{-1} I \Rightarrow \boxed{X = (A + 2B)^{-1} I = \overline{(A + 2B)^{-1}}}$$

b) Cálculo de $A + 2B$

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de $(A+2B)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_1+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4F_2+F_3} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_3+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_2+F_1} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(4A) a) Los vectores normales de ambos planos tienen que ser iguales o proporcionales, y además tienen que tener puntos en común.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_{\pi} = (a, 2, 1) \\ \vec{n}_{\pi'} = (2, -4, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{1}{-2} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{1}{-2} \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$P_{\pi}(1, 2, z) \in \pi \Rightarrow z : -1 + 2 \cdot 2 + z \cdot -4 = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow P_{\pi}(1, 2, 1)$$

$$\text{El pto } P_{\pi} \in \pi' \Rightarrow 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = b \Rightarrow \boxed{b = -8}$$

b) En este caso, los vectores normales tienen que ser iguales o proporcionales y no tener ningún punto en común.

De otra forma : rango $A = 1$ y rango $(A|B) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } (A|B) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & -2 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4a - 4 \Rightarrow \boxed{a = -1} \Rightarrow \text{rango } A = 1 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & b \end{vmatrix} = b + 8 \Rightarrow b = -8$$

$$\boxed{\text{Si } a = -1 \text{ y } b \neq -8 \Rightarrow \pi \parallel \pi'}$$

$$c) \pi \perp \pi' \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi} \perp \vec{n}_{\pi'} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi} \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a, 2, 1) \cdot (2, -4, -2) = 0 \Rightarrow 2a - 8 - 2 = 0 \Rightarrow a = 5$$

Si $a = 5$ y $b \in \mathbb{R}$, se tiene que $\pi \perp \pi'$.

www.yoquieroaprobar.es



PROPUESTA B

1B. a) Calcula para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(ax))^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2} \quad (1,25 \text{ puntos})$$

b) Calcula el límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \quad (1,25 \text{ puntos})$$

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2 \cos x}{1 + \sin^2 x} dx, \quad \int (x^2 + 2x) \ln x dx \quad (1,25 \text{ puntos por integral})$$

3B. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$$

a) ¿Existe algún valor del parámetro m para el que el sistema sea incompatible? **(0,5 puntos)**

b) Estudia para qué valor del parámetro m el sistema tiene alguna solución distinta de la trivial $x = y = z = 0$. **(1 punto)**

c) Resuelve el sistema para todos los valores de $m \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**

4B. Dados el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto P . **(1,25 puntos)**

b) Calcula el punto simétrico Q de P respecto a r . **(1,25 puntos)**

Propuesta B

$$(1B) a) \lim_{x \rightarrow 0} [\cos(ax)]^{1/x^2} = e^{-2}$$

$$\parallel [1^\infty] = e^\alpha \text{ donde } \alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (\cos(ax) - 1) = [\infty \cdot 0] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - 1}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a \sin(ax)}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a^2 \cos(ax)}{2} = \frac{-a^2}{2}$$

$$\text{Por tanto, } e^{-a^2/2} = e^{-2} \Rightarrow -\frac{a^2}{2} = -2 \Rightarrow -a^2 = -4 \Rightarrow \boxed{a = \pm 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = \infty \cdot (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} (x+1 - (x-1))}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \boxed{1}$$

$$(2B) a) \int \frac{2 \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right] = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg}(t) =$$

$$= \boxed{2 \operatorname{arctg}(\sin x) + C}$$

$$b) \int (x^2 + 2x) \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = (x^2 + 2x) dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3} + x^2 \end{array} \right] = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \ln x -$$

$$- \int \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \frac{1}{x} dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + x \right) dx =$$

$$= \boxed{\left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + C}$$

$$(3B) \begin{cases} x+y-z=0 \\ -4x-2y+mz=0 \\ 3x-2y+mz=0 \end{cases}$$

a) Es un sistema homogéneo, luego $\boxed{\nexists m \in \mathbb{R}}$ t.q. el sistema sea incompatible.

b) Si no hay solución trivial, el sistema tiene que ser compatible indeterminado, luego $\text{rango } A = \text{rango } (A|B) \leq 2$, ya que el sistema tiene 3 incógnitas.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & m \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & m-4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & m-4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 2m - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m = -1}$$

$$\text{Si } m = -1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \text{rango } A = \text{rango } (A|B) = 2 < 3 = n^{\circ} \text{ de incógnitas} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

$$\boxed{m = -1} \quad c) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[-3F_1+F_2]{4F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{De la segunda ecuación: } \begin{cases} 2y - 5z = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow y = \frac{5}{2} \lambda$$

Sustituimos en la 1ª ecuación:

$$x + y - z = 0 \Rightarrow x = -y + z = -\frac{5}{2} \lambda + \lambda = -\frac{3}{2} \lambda$$

$$\boxed{\text{Solución: } (x, y, z) = \left(-\frac{3}{2} \lambda, \frac{5}{2} \lambda, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}}$$

$$(4B) \quad r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s \equiv \begin{cases} \text{Punto: } P(1, 0, 1) \\ \text{Vector director: } \overrightarrow{PR} \text{ donde } R \text{ es un punto genérico de } r \end{cases}$$

Se tiene que $\overrightarrow{PR} \perp \vec{u}_r = (1, 1, 1)$ (vector director de r)

$$\overrightarrow{PR} = (\lambda, 1 + \lambda, 2 + \lambda) - (1, 0, 1) = (\lambda - 1, \lambda + 1, \lambda + 1)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_r \cdot \vec{PR} &= 0 \Rightarrow (2, 1, 1) \cdot (\lambda - 1, \lambda + 1, \lambda + 1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2(\lambda - 1) + \lambda + 1 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow R \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow R(0, 1, 2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{PR} = (0, 1, 2) - (1, 0, 1) = (-1, 1, 1)$$

$$S \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R}$$

b) El punto R hallado en el apartado anterior, es el punto medio entre P y Q.

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{1 + x_Q}{2} \Rightarrow x_Q = -1 \\ 1 &= \frac{0 + y_Q}{2} \Rightarrow y_Q = 2 \\ 2 &= \frac{1 + z_Q}{2} \Rightarrow z_Q = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{Q(-1, 2, 3)}$$