



Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{ax}, & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \textbf{(1,25 puntos)}$$

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2} dx, \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2} dx \quad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

Observación: El cambio de variable $t = e^x$ puede ayudarte a calcular la segunda integral.

3A. a) Despeja X en la ecuación matricial $X \cdot A - B = 2X$, donde A , B y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1,25 puntos)**

b) Calcula X , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1,25 puntos)}$$

4A. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(2 puntos)**

b) Encuentra el punto de corte de las rectas en el caso en que sean secantes. **(0,5 puntos)**

Septiembre 2013

Propuesta A

$$(1A) f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{ax} & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, por ser funciones elementales, cuyos denominadores no se anulan.

Continuidad en $x=0$: ¿ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{ax} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{a} = \frac{2}{a} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x = 7^0 = 1 = f(0) \end{cases} \Rightarrow a=2$$

Para $a=2$, f es continua.

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+7}{2x+1}\right)^x = [1^\infty] = e^\alpha \text{ donde}$$

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2x+7}{2x+1} - 1 \right) = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{2x+7-2x-1}{2x+1} \right) =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2x+1} = \frac{6}{2} = 3$$

Por tanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^3$

$$(2A) a) \int \frac{1+x+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{x}{x^2} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx =$$
$$= \int x^{-2} dx + \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-3/2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \log x + \frac{x^{-1/2}}{-1/2} =$$
$$= -\frac{1}{x} + \log x - 2 \frac{1}{\sqrt{x}} + C$$

$$b) \int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx = \left[\begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right] = \int \frac{dt}{t^2 - 3t + 2}$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{1}{t^2 - 3t + 2} = \frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2) + B(t-1)}{(t-1)(t-2)} =$$

$$= \frac{At - 2A + Bt - B}{(t-1)(t-2)} = \frac{(A+B)t + (-2A-B)}{(t-1)(t-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A+B)t + (-2A-B) = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ -2A-B=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ +2B-B=1 \end{matrix} \Rightarrow B=1 \Rightarrow A=-1$$

Calculamos la integral

$$\int \frac{dt}{t^2-3t+2} = \int \frac{-1}{t-1} dt + \int \frac{1}{t-2} dt = -\log(t-1) + \log(t-2) =$$

$$= \boxed{-\log(e^x-1) + \log(e^x-2) + C} \text{ donde } \log \text{ es el logaritmo natural.}$$

$$\textcircled{3A} \text{ a) } XA - B = ZX \Rightarrow XA - ZIX = B \Rightarrow XA - X(ZI) = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(A - ZI) = B \Rightarrow X(A - ZI)(A - ZI)^{-1} = B(A - ZI)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = B(A - ZI)^{-1}}$$

Calculamos $A - ZI$

$$A - ZI = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $(A - ZI)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[-F_1 + F_3]{-2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_2 + F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Calculamos X

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \\ 11 & -7 & 3 \end{pmatrix}}$$

4A) a) $r \Rightarrow x = 1 + 2z \Rightarrow y = 2 + z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

$s \Rightarrow 3y - z = 1 - a \Rightarrow z = a - 1 + 3y \Rightarrow x + y + a - 1 + 3y = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = -a + 2 - 4y \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -a + 2 - 4\mu \\ y = \mu \\ z = a - 1 + 3\mu \end{cases}$

$\begin{cases} 1 + 2\lambda = -a + 2 - 4\mu \\ 2 + \lambda = \mu \\ \lambda = a - 1 + 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 4\mu = 1 - a \\ \lambda - \mu = -2 \\ \lambda - 3\mu = a - 1 \end{cases}$

$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 1-a \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & a-1 \end{array} \right)$

$\det(A|B) = -2(a-1) - 3(1-a) - 8 + 1-a - 12 - 4(a-1) =$
 $= -2a + 2 - 3 + 3a - 8 + 1 - a - 12 - 4a + 4 =$
 $= -4a - 16 = 0 \Rightarrow a = -4$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

Así, si $a = -4 \Rightarrow \text{rango } A = 2 = \text{rango } (A|B) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{S.C.D.} \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cortan en un punto}$
 Si $a \neq -4 \Rightarrow \text{rango } A = 2 < 3 = \text{rango } (A|B) \Rightarrow \text{S.I.} \Rightarrow$
 $\Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$

b) Si $a = -4 \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + 4\mu = 5 \\ \lambda - \mu = -2 \\ \lambda - 3\mu = -5 \end{cases} \xrightarrow{-(1)} \begin{cases} -\lambda + \mu = 2 \\ \lambda - 3\mu = -5 \end{cases}$
 $\frac{\lambda - 3\mu = -5}{-\lambda + \mu = 2} \Rightarrow -2\mu = -3 \Rightarrow \mu = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = -2 + \mu = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

El punto de corte es: $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda = 1 - 1 = 0 \\ y = 2 + \lambda = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$

Comprobación: sustituimos en s :

$x = -(-4) + 2 - 4\frac{3}{2} = 0$

$y = \frac{3}{2}$

$z = -4 - 1 + 3\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$



PROPUESTA B

1B. a) Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto. **(1 punto)**

b) Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ donde la recta tangente tiene pendiente mínima. **(1,5 puntos)**

2B. a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = 1/x$ y $g(x) = -2x + 3$. **(0,5 puntos)**

b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y - 5z = -1 \\ 2x - y - 3z = 1 - m \\ x - 2y + 2z = m \end{cases} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4B. a) Dados los puntos $P(4, 2, 3)$ y $Q(2, 0, -5)$, da la ecuación implícita del plano π de modo que el punto simétrico de P respecto a π es Q . **(1,25 puntos)**

b) Calcula el valor del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el plano determinado por los puntos P , Q y $R(\lambda, 1, 0)$ pase por el origen de coordenadas. **(1,25 puntos)**

Propuesta B

1B) a) La derivada de una función $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=a$, es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

$f''(x) = 6x + 6$

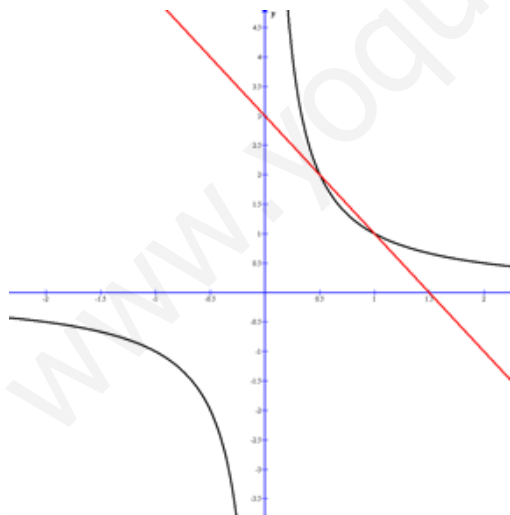
$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow x=0$ es un mínimo (relativo) de f

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f'''(x) = 6$

$f'''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow x = -1$ es un mínimo (relativo) de la pendiente de la recta tangente.

2B) a)



$f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = -2x + 3$

x	y
1	1
0,1	10
10	0,1
-1	-1
-0,1	-10
-10	-0,1

x	y
0	3
1	1

b) Puntos de corte entre las funciones

$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = -2x + 3 \Rightarrow 1 = -2x^2 + 3x \Rightarrow 0 = -2x^2 + 3x - 1$

$\Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Área

$A = \int_{1/2}^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_{1/2}^1 (-2x + 3 - \frac{1}{x}) dx = \left[-x^2 + 3x - \log x \right]_{1/2}^1 =$

$$= -1^2 + 3 \cdot 1 - \log 1 - \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} - \log \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{3}{4} + \log \frac{1}{2} \right) u^2$$

$$= \frac{3}{4} + \log 1 - \log 2 = \left(\frac{3}{4} - \log 2 \right) u^2$$

3B)
$$\begin{cases} x+y-5z = -1 \\ 2x-y-3z = 1-m \\ x-2y+2z = m \end{cases}$$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 1-m \\ 1 & -2 & 2 & m \end{array} \right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 3-m \\ 0 & -3 & 7 & m+1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 3-m \\ 0 & 0 & 0 & 2m-2 \end{array} \right) [1]$$

De [1]: $2m-2=0 \Rightarrow m=1$

Discusión:
$$\begin{cases} \text{Si } m \neq 1 \Rightarrow \text{rango } A = 2 \neq \text{rango } (A|B) = 3 \Rightarrow \text{S.I.} \\ \text{Si } m = 1 \Rightarrow \text{rango } A = 2 = \text{rango } (A|B) < 3 = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.I.} \end{cases}$$

b) $m=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \end{matrix}$$

llamamos $z = \lambda$ y sustituimos en [2]: $-3y + 7\lambda = 2 \Rightarrow y = \frac{2-7\lambda}{-3} = \frac{-2+7\lambda}{3}$

Sustituimos en [1]: $x+y-5z = -1$

$$x = -1 - y + 5z = -1 - \frac{-2+7\lambda}{3} + 5\lambda = \frac{8\lambda-1}{3}$$

Soluciones:
$$(x, y, z) = \left(\frac{8\lambda-1}{3}, \frac{7\lambda-2}{3}, \lambda \right) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

4A) a) $\overrightarrow{PQ}$ es el vector normal del plano π , que es perpendicular a $\overrightarrow{SG}$, donde S es el punto medio de PQ (y pertenece al plano buscado) y G es un pto genérico del plano.

$$S \begin{cases} x_s = \frac{4+2}{2} = 3 \\ y_s = \frac{2+0}{2} = 1 \\ z_s = \frac{3+(-5)}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{PQ} = (2, 0, -5) - (4, 2, 3) = (-2, -2, -8) \\ \overrightarrow{SG} = (x, y, z) - (3, 1, -1) = (x-3, y-1, z+1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{SG} = 0 \Rightarrow (-2, -2, -8) \cdot (x-3, y-1, z+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-3) - 2(y-1) - 8(z+1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x + y + 4z = 0}$$

$$b) \pi' \equiv \begin{cases} \vec{PQ} = (-2, -2, -8) \\ \vec{PR} = (\lambda, 1, 0) - (4, 2, 3) = (\lambda-4, -1, -3) \Rightarrow \\ \vec{PG} = (x, y, z) - (4, 2, 3) = (x-4, y-2, z-3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-3 \\ \lambda-4 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8(x-4) - 2(\lambda-4)(z-3) + 6(y-2) -$$

$$- 2(z-3) - 6(x-4) + 8(\lambda-4)(y-2) = 0 \equiv \pi'$$

Imponemos que $(0, 0, 0) \in \pi'$ para calcular λ :

$$8(0-4) - 2(\lambda-4)(0-3) + 6(0-2) - 2(0-3) - 6(0-4) + 8(\lambda-4)(0-2) =$$

$$= -32 + 6\lambda - 24 - 12 + 6 + 24 - 16\lambda + 64 = 0 \Rightarrow 26 - 10\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}}$$