



Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el Teorema de Bolzano. **(0,5 puntos)**

b) Razona que las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3$ y $g(x) = e^x$ se cortan en algún punto con coordenada de abscisa entre -1 y 0. **(1 punto)**

c) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$. **(1 punto)**

2A. Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, para que el valor (en unidades de superficie) del área de la región determinada por la parábola $f(x) = -x^2 + a^2$ y el eje de abscisas, coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -a$. **(2,5 puntos)**

3A. a) Encuentra dos matrices A , B cuadradas de orden 2 que cumplan:

- Su suma es la matriz identidad de orden 2.
- Al restar a la matriz A la matriz B se obtiene la traspuesta de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Si M es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M| = 7$, razona cuál es el valor de los determinantes $|M^2|$ y $|2M|$. **(1 punto)**

4A. a) Estudia la posición relativa del plano $\pi \equiv x - y - z = a$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + az = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia entre π y r para cada valor de $a \in \mathbb{R}$. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Propuesta A

1A) 3) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo ($\text{sig} f(a) \neq \text{sig} f(b)$), entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b) Consideramos la función

$$h(x) = f(x) - g(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 3 - e^x$$

La función $h(x)$ verifica:

h es continua en $[-1, 0]$, ya que es continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de una función polinómica y una exponencial.

$$h(-1) = 3(-1)^5 - 10(-1)^4 + 10(-1)^3 + 3 - e^{-1} = -20 - \frac{1}{e} < 0$$

$$h(0) = 3 \cdot 0^5 - 10 \cdot 0^4 + 10 \cdot 0^3 + 3 - e^0 = 2 > 0$$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (-1, 0)$ t.q. $h(c) = 0$, esto es $f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$, es decir, c es el punto de corte de f y g .

c) $f'(x) = 15x^4 - 40x^3 + 30x^2$

$$f''(x) = 60x^3 - 120x^2 + 60x = 60x(x^2 - 2x + 1)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 60x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow x=0 \text{ y } x=1 \text{ son posibles puntos de inflexión.}$$

$$f'''(x) = 180x^2 - 240x + 60$$

$$\left. \begin{array}{l} f'''(0) = 60 \neq 0 \\ f'''(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f \text{ tiene un punto de inflexión en } x=0}$$

2A) Puntos de corte con el eje OX

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + a^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{a^2} = \pm a$$

Signo de $f(x)$

$$f(0) = a^2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ en } (-a, a)$$

Área

$$A = \int_{-a}^a (-x^2 + a^2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + a^2 x \right]_{-a}^a = -\frac{a^3}{3} + a^3 - \left(-\frac{-a^3}{3} - a^3 \right) =$$
$$= -\frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 = \frac{4a^3}{3}$$

Pendiente

$$f'(x) = -2x$$

$$f'(-a) = 2a$$

Solución

$$\frac{4a^3}{3} = 2a \Rightarrow 4a^3 - 6a = 0 \Rightarrow 2a(2a^2 - 3) = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Por tanto, $\boxed{a = \frac{\sqrt{6}}{2}}$

3A) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$$\left. \begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A-B &= \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_{11} + b_{11} = 1 & [1] \\ a_{12} + b_{12} = 0 & [2] \\ a_{21} + b_{21} = 0 & [3] \\ a_{22} + b_{22} = 1 & [4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} - b_{11} = 1 & [5] \\ a_{12} - b_{12} = 3 & [6] \\ a_{21} - b_{21} = 2 & [7] \\ a_{22} - b_{22} = 4 & [8] \end{cases}$$

$$[1] + [5]: 2a_{11} = 2 \Rightarrow a_{11} = 1$$

Sustituimos en [1]: $b_{11} = 0$

$$[2] + [6]: 2a_{12} = 3 \Rightarrow a_{12} = \frac{3}{2}$$

Sustituimos en [2]: $b_{12} = -\frac{3}{2}$

$$[3] + [7]: 2a_{21} = 2 \Rightarrow a_{21} = 1$$

Sustituimos en [3]: $b_{21} = -1$

$$[4] + [8]: 2a_{22} = 5 \Rightarrow a_{22} = \frac{5}{2}$$

Sustituimos en [4]: $b_{22} = -\frac{3}{2}$

Por tanto, $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & 5/2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ -1 & -3/2 \end{pmatrix}}$

b) $\boxed{|M^2| = |MM| = |M||M| = 7^2 = 49}$

$\boxed{|2M| = 2^2|M| = 4 \cdot 7 = 28}$

4A) a) Si el producto escalar del vector normal del plano y el vector director de la recta es nulo, la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. En este último caso, tendrían algún punto en común.
De no ser cero el producto escalar, la recta y el plano se cortan en un punto.

$$\bullet \quad x = 2y \Rightarrow 2 \cdot 2y + y + az = 0 \Rightarrow 5y + az = 0 \Rightarrow z = -\frac{5}{a}y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_r = \left(2, 1, -\frac{5}{a} \right)$$

$$\bullet \quad \vec{n}_\pi = (1, -1, -1)$$

$$\bullet \quad \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = (1, -1, -1) \cdot \left(2, 1, -\frac{5}{a} \right) = 2 - 1 + \frac{5}{a} = 1 + \frac{5}{a}$$

$$\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r = 0 \Rightarrow a = -5$$

$$\bullet \quad \text{Si } a = -5 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2a\lambda = -10\lambda \\ y = a\lambda = -5\lambda \\ z = -5\lambda \end{cases} \Rightarrow R(0,0,0) \in r \text{ y sustituyendo}$$

en la ecuación del plano: $0 - 0 - 0 \neq -5 \Rightarrow R \notin \pi$

Discusión:

Si $a \neq -5 \Rightarrow r$ y π se cortan en un punto.

Si $a = -5 \Rightarrow r$ y π son paralelos

b) $\forall a \in \mathbb{R} - \{-5\}, r$ y π se cortan en un punto $\Rightarrow d(r, \pi) = 0$

Si $a = -5 \Rightarrow x - y - z = -5 \Rightarrow \pi \equiv x - y - z + 5 = 0$

$$d(r, \pi) = d(R, \pi) = \frac{|0 - 0 - 0 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} u$$



PROPUESTA B

1B. a) Calcula los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x + 1}$$

tenga como asíntota oblicua la recta $y = 2x + 3$. **(1,5 puntos)**

b) Para los valores encontrados, escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisas $x = 0$. **(1 punto)**

2B. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx, \quad \int \frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x} dx \quad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3B. a) Sabiendo que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, calcula los determinantes

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. **(2 puntos)**

b) Razona que, puesto que $|A| = 2$, los parámetros a , b y c deben ser distintos entre sí (no puede haber dos iguales). **(0,5 puntos)**

4B. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - z = 12 \end{cases} \quad \textbf{(1,25 puntos)}$$

b) Calcula la distancia entre las rectas r y s . **(1,25 puntos)**

Junio 2013

Propuesta B

1B) a) $y = mx + n = 2x + 3$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2 + bx}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx}{x(x+1)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2}{x^2} + \frac{bx}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \boxed{a = 2}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^2 + bx}{x+1} - 2x \right] = [\infty - \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + bx - 2x(x+1)}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + bx - 2x^2 - 2x}{x+1} \right) =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{bx}{x} - \frac{2x}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b-2}{1 + \frac{1}{x}} = b-2 = 3 \Rightarrow \boxed{b=5}$$

b) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(4x+5)(x+1) - (2x^2+5x) \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = 5 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \text{ La ec. de la recta tangente a } f \text{ en } x=0 \text{ es:}$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$\boxed{y = 5x}$$

2B) a) $\int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} t = 1 + \sin^2 x \\ dt = 2 \sin x \cos x dx \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t} = \log t =$

$$= \boxed{\log(1 + \sin^2 x) + C} \text{ donde } \log \text{ es el logaritmo natural.}$$

b) $\int \frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x} dx$

Descomponemos $\frac{x^2 + x - 4}{x^3 - 4x}$ en fracciones simples:

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$$

$$\frac{x^2+x-4}{x^3-4x} = \frac{x^2+x-4}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}$$

$$\Rightarrow A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2) = x^2+x-4$$

$$x=2 \Rightarrow A(2-2)(2+2) + 2B(2+2) + 2C(2-2) = 2^2+2-4 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$x=0 \Rightarrow A(0-2)(0+2) + B \cdot 0(0+2) + C \cdot 0(0-2) = 0^2+0-4 \Rightarrow A = 1$$

$$x=-2 \Rightarrow A(-2-2)(-2+2) + B(-2)(-2+2) + C(-2)(-2-2) = (-2)^2+(-2)-4 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x^2+x-4}{x^3-4x} = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+2}$$

Calculamos la integral:

$$\int \frac{x^2+x-4}{x^3-4x} dx = \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= \log x + \frac{1}{4} \log(x-2) - \frac{1}{4} \log(x+2) + C \quad \text{donde } \log \text{ es el logaritmo natural}$$

3B) a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \stackrel{[1]}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \\ & \stackrel{[1]}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \\ & \stackrel{[2]}{=} 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + 5(-1) \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + 5 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + (-1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}}_{=0} = \\ & \stackrel{[3]}{=} 5 \cdot 2 = \boxed{10} \end{aligned}$$

[1]: Un determinante, con una fila o columna formada por la suma de dos números, puede descomponerse en suma de otros dos determinantes que tienen las mismas filas o columnas restantes y, en lugar de aquella, otra formada por los primeros y segundos sumandos, respectivamente.

[2]: Si multiplicamos una fila o columna por un n°, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

[3]: El determinante de una matriz con dos filas o columnas iguales es cero.

[4]: Si se intercambian dos filas o dos columnas, cambia el signo del determinante.

$$\begin{vmatrix} (a+d)^2 & (b+d)^2 & (c+d)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2a+d & b^2+2b+d & c^2+2c+d \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + 2 = 2$$

$$b) \quad 2 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[-a^2F_1+F_3]{-aF_1+F_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b+a)(b-a) & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)[c+a-(b+a)] = (b-a)(c-a)(c-b) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b-a \neq 0 \Rightarrow b \neq a \\ c-a \neq 0 \Rightarrow c \neq a \\ c-b \neq 0 \Rightarrow c \neq b \end{cases}$$

$$(4B) \quad a) \quad r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow y=1 \Rightarrow x+1-z=1 \Rightarrow x=z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_r = (1, 0, 1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases} \Rightarrow x=z \Rightarrow z+2y-z=12 \Rightarrow y=6 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=6 \\ z=\mu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_s = (1, 0, 1)$$

Como $\vec{u}_r = \vec{u}_s$ y $P_r(0,1,0) \notin s$, se tiene que las rectas son paralelas

b) $R(0, 1, 0)$

$$\vec{n}_\pi = \vec{u}_r = \vec{u}_s = (1, 0, 1)$$

$$\vec{RG} = (x, y, z) - (0, 1, 0) = (x, y-1, z) \left. \begin{array}{l} \vec{n}_\pi \perp \vec{RG} \Rightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{RG} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (1, 0, 1) \cdot (x, y-1, z) = 0 \Rightarrow \end{array} \right\}$$

$$G \in \pi \text{ (genérico)}$$

$$\pi \equiv x + z = 0$$

$$\text{Como } \pi \equiv x + z = 0 \Rightarrow \mu + \mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow S \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow S(0, 6, 0)$$

Se tiene que:

$$\boxed{d(r, s) = d(R, S) = \sqrt{(0-0)^2 + (6-1)^2 + (0-0)^2} = 5u}$$