Septiembre 2014

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de la función

$$f(x) = \frac{x-1}{2x+2}$$

Estudia si tiene puntos de inflexión. **(1,5 puntos)**
b) ¿En qué puntos de la gráfica de $f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta $y = x - 2$? **(1 punto)**

2A. a) Esboza la región encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = \text{sen}x$, $g(x) = -\text{sen}x$, y las rectas $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$. **(0,5 puntos)**
b) Calcula el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3A. a) Discute, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix}$$ **(2 puntos)**

b) ¿Para qué valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ existe la matriz inversa de A? **(0,5 puntos)**

4A. a) Estudia la posición relativa de las rectas

$r \equiv x = -y = z$ y $s \equiv x = y = z - 2$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula la distancia entre r y s. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

Septiembre 2014

Propuesta A

1A a) Curvatura (concavidad/convexidad): signo de f''

$$f(x)=\frac{x-1}{2x+2} \qquad Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$$

$$f'(x)=\frac{2x+2-(x-1)\cdot 2}{(2x+2)^2}=\frac{4}{(2x+2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-4\cdot 2(2x+2)\cdot 2}{(2x+2)^4}=\frac{-16(2x+2)}{(2x+2)^4}$$

$$f''(x)>0 \iff -16(2x+2)>0 \Rightarrow 2x+2<0 \Rightarrow x<-1$$

$$\boxed{f \text{ es } \begin{cases} \text{convexa si } x<-1, \text{ es decir, en } (-\infty,-1) \\ \text{cóncava si } x>-1, \text{ es decir, en } (-1,+\infty) \end{cases}}$$

No tiene puntos de inflexión, ya que los puntos de inflexión son los puntos en los que la función pasa de cóncava a convexa, o viceversa.

b) $y=x-2$ tiene pendiente 1

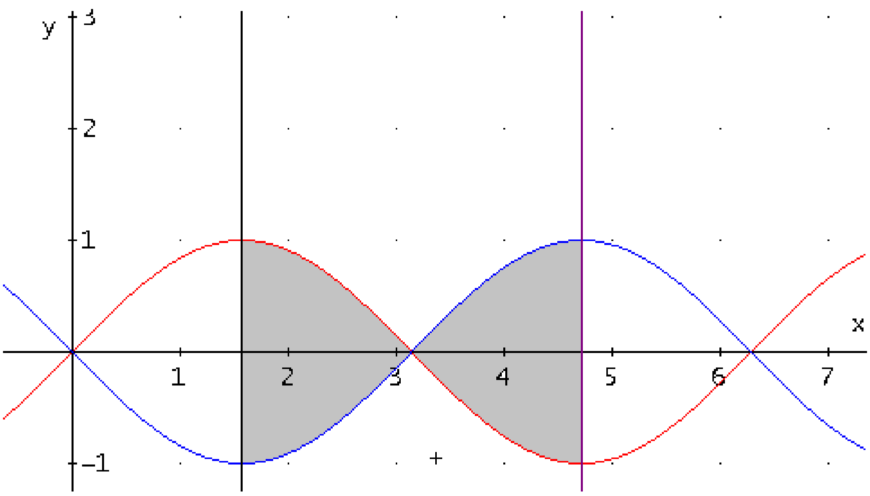
Por tanto, buscamos los puntos en los que f' valga 1:

$$f'(x)=1 \iff \frac{4}{(2x+2)^2}=1 \Rightarrow 4=(2x+2)^2 \Rightarrow 4=4x^2+4+8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2+8x=0 \Rightarrow 4x(x+2)=0 \Rightarrow x=\begin{cases}0\\-2\end{cases}$$

Así, la gráfica de $f(x)$ tiene recta tangente paralela a $y=x-2$ en $(0,f(0))=(0,-\frac{1}{2})$ y en $(-2,f(-2))=(-2,\frac{3}{2})$

2A a) Esbozo de la gráfica



b) $$A=\int_{\pi/2}^{2\pi}(\text{sen}\,x-(-\text{sen}\,x))\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi/2}(-\text{sen}\,x-\text{sen}\,x)\,dx=$$

$$=\int_{\pi/2}^{2\pi}2\,\text{sen}\,x\,dx-2\int_{2\pi}^{3\pi/2}\text{sen}\,x\,dx=$$

$$=2\left(\cos x\Big|_{\pi/2}^{2\pi}\right)-2\left(\cos x\Big|_{2\pi}^{3\pi/2}\right)=$$

$$=\boxed{4\,u^2}$$

3A a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{vmatrix} = -3-(m+1)(m+3)+3(m-1)^2+3(m-1)-(m+3)(m-1)+$$
$$+3(m+1) = m^2-6m=0 \Rightarrow m(m-6)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m=\begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases}$$

Si $m \neq \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases} \Rightarrow \text{rg}\, A = 3$

$m=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\, A=2$

$m=6 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 5 & 9 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\, A=2$

<u>Discusión</u>: Si $m \neq \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases} \Rightarrow \text{rg}\, A = 3$

Si $m = \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases} \Rightarrow \text{rg}\, A = 2$

b) $\boxed{\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \begin{cases} 0 \\ 6 \end{cases}}$

4A a) $r \equiv x=-y=z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-y \Rightarrow x+y=0 \\ x=z \Rightarrow x-z=0 \end{cases}$

$s \equiv x=y=z-2 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=y \Rightarrow x-y=0 \\ x=z-2 \Rightarrow x-z=-2 \end{cases}$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \tilde{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Rango de M</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1-1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\, M = 3$$

<u>Rango de $\tilde{M}$</u>

$$|\tilde{M}| = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}\, \tilde{M} = 4$$

$\Rightarrow \boxed{r \text{ y } s \text{ se cruzan}}$

<u>De otra forma</u>

$\vec{u}_r = (1,-1,1)$

$\vec{u}_s = (1,1,1)$

$P_r(0,0,0) \in r$, $P_s(0,0,2)$, $\overrightarrow{P_rP_s} = (0,0,2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) $d(r,s) = \left| \dfrac{\det(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r P_s})}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} \right|$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{k} = (-2, 0, 2)$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\boxed{d(r,s) = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{8}}{8} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}\ u}$$

PROPUESTA B

1B. Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
a) Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus extremos relativos. **(1,5 puntos)**
b) Estudia si tiene asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$. **(1 punto)**

2B. Calcula las integrales

$$\int \frac{e^x}{e^x - e^{-x}}\, dx, \qquad \int \frac{2}{4 + x^2}\, dx$$

(1,25 puntos por cada integral)

Nota: En la primera integral puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = e^x$.

3B. Encuentra dos matrices A, B cuadradas de orden 2 que sean solución del sistema matricial

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 2A & + & B & = & C^2 \\ A & - & B & = & C^{-1} \end{array} \right.$$

siendo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

4B. a) Estudia, en función del valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la posición relativa de los planos

$$\pi_1 \equiv x + y - z = 3$$

$$\pi_2 \equiv x - y + az = -1$$

$$\pi_3 \equiv ax + y - z = 5$$

(1,5 puntos)
b) Calcula, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, la distancia entre los planos π_1 y π_3. **(1 punto)**

Propuesta B

1B $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ $\quad$ $Dom(f)=\mathbb{R}$

a) Monotonía (crecimiento/decrecimiento): signo de f'

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$f'(x)>0 \iff 2x+1>0 \iff x>-\frac{1}{2}$$

$$f'(x)<0 \iff 2x+1<0 \iff x<-\frac{1}{2}$$

$$\boxed{f \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } \left(-\frac{1}{2},+\infty\right) \\ \text{decreciente en } \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \end{cases}}$$

Como f es continua en $\mathbb{R}$ por ser composición de funciones continuas y en $x=-\frac{1}{2}$ pasa de ser decreciente a ser creciente, se tiene que $\boxed{x=-\frac{1}{2} \text{ es un mínimo relativo.}}$

b) La asíntota oblicua, si existe, es de la forma $y=mx+n$ con

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad y \quad n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-x\right]=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

Así, $\boxed{\text{la asíntota oblicua es } y=x+\frac{1}{2}}$

2B a) $$\int\frac{e^x}{e^x-e^{-x}}\,dx=\left[\begin{array}{l} t=e^x \\ dt=e^x\,dx \end{array}\right]=\int\frac{1}{t^2-1}\,dt \underset{(*)}{=}$$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}}{t-1}\,dt+\int\frac{\frac{1}{2}}{t+1}\,dt=\frac{1}{2}\log|t-1|+\frac{1}{2}\log|t+1|=$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\log|e^x-1|+\frac{1}{2}\log|e^x+1|+C}$$ donde $\log \equiv$ logaritmo natural

$$(*)\quad \frac{1}{t^2-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1} \Rightarrow 1=A(t+1)+B(t-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow 1=2A \Rightarrow A=\frac{1}{2} \\ t=-1 \Rightarrow -1=-2B \Rightarrow B=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{t^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{t-1}+\frac{\frac{1}{2}}{t+1}$$

<u>De otra forma</u>: $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x-e^{-x}}dx=\int\frac{e^x}{e^x-\frac{1}{e^x}}dx=\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}dx=\boxed{\frac{1}{2}\log|e^{2x}-1|+C}$$

b) $\displaystyle\int\frac{2}{4+x^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx=\boxed{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C}$

3B

$$\begin{aligned} 2A+B&=C^2 \\ A-B&=C^{-1} \\ \hline \text{sumamos}\quad 3A&=C^2+C^{-1} \Rightarrow A=\frac{1}{3}(C^2+C^{-1}) \end{aligned}$$

Como $A-B=C^{-1} \Rightarrow B=A-C^{-1}=\frac{1}{3}(C^2+C^{-1})-C^{-1}$

<u>Calculamos C^2</u>

$$C^2=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&18\\12&31\end{pmatrix}$$

<u>Calculamos C^{-1}</u>

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&5&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{-2F_1+F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&-1&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{(-1)F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&2&-1\end{array}\right)\xrightarrow{-3F_2+F_1}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-5&3\\0&1&2&-1\end{array}\right)\Rightarrow C^{-1}=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$$

<u>Calculamos A</u>

$$\boxed{A=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}7&18\\12&31\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&21\\14&30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3&7\\14/3&10\end{pmatrix}}$$

<u>Calculamos B</u>

$$\boxed{B=A-C^{-1}=\begin{pmatrix}2/3&7\\14/3&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17/3&4\\8/3&11\end{pmatrix}}$$

$\boxed{4B}$ $\pi_1 \equiv x+y-z=3$

$\pi_2 \equiv x-y+az=-1$

$\pi_3 \equiv ax+y-z=5$

a) Posición relativa

$$M=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&a\\a&1&-1\end{pmatrix},\quad \tilde{M}=\begin{pmatrix}1&1&-1&3\\1&-1&a&-1\\a&1&-1&5\end{pmatrix}$$

$$|M|=1-1+a^2-a-a+1=a^2-2a+1=(a-1)^2=0 \Rightarrow a=1$$

Si: $\boxed{a\neq 1} \Rightarrow rg\, M=3=rg\,\tilde{M} \Rightarrow$ $\boxed{\text{los 3 planos son secantes en un punto}}$

$\boxed{a=1} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow rg\, M=2$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&3\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2}\begin{pmatrix}1&1&-1&3\\0&-2&2&-4\\0&0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow rg\,\tilde{M}=3$$

Estudiamos los rangos de las submatrices de orden 2x3 de M

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rango}=2$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{-F_1+F_2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rango}=1$$

$\boxed{\text{Dos planos son paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas}}$

b) $\boxed{d(\pi_1,\pi_3)}=d(P_{\pi_1},\pi_3)=\dfrac{|0+0+3-5|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,u}$

$P_{\pi_1}(0,0,3)$