Septiembre 2015

UCLM UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x e^{\operatorname{sen} x}}, \qquad \lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{\frac{1}{x+\operatorname{sen} x}} \qquad \textbf{(1,25 puntos cada límite)}$$

Nota: $\tan x$ denota a la tangente de x.

2A. a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$. **(0,5 puntos)**
b) Esboza la región encerrada entre las gráficas de $f(x)$, la recta calculada en el apartado a) y el eje de ordenadas. **(0,5 puntos)**
c) Calcula el área de la región anterior. **(1,5 puntos)**

3A. a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. **(0,5 puntos)**
b) Razona que el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & - & 3z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & az & = & 5 \end{array}\right. \qquad a \in \mathbb{R}$$

no es incompatible para ningún valor $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**
c) Resuelve el sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. **(1 punto)**

4A. Dada la recta

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{array}\right.$$

a) Da la ecuación implícita del plano π perpendicular a r que pasa por el punto $P(2,1,1)$. **(1,25 puntos)**
b) Halla el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los tres puntos que resultan al hacer la intersección de π con los ejes coordenados. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

$\boxed{\text{Septiembre 2015}}$

Propuesta A

1A a) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x e^{\operatorname{sen}x}}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2}{1+2x}}{e^{\operatorname{sen}x} + x\cos x\, e^{\operatorname{sen}x}} = \boxed{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{x+\operatorname{sen}x}} = [1^\infty] = e^\alpha$ donde

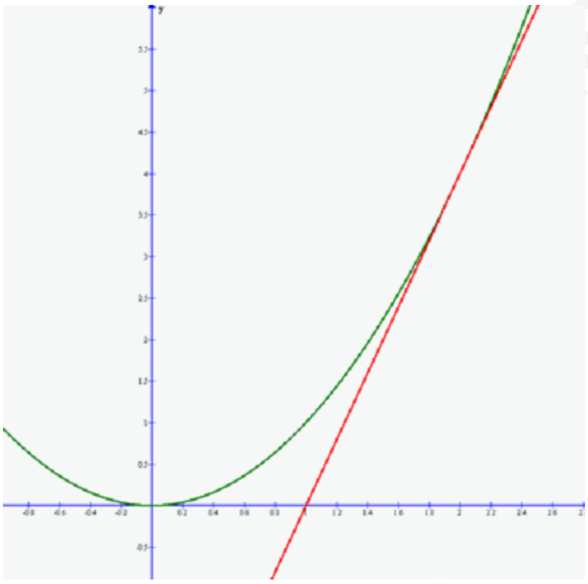
$$\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+\operatorname{sen}x}\left[\cancel{1}+\operatorname{tg}x - \cancel{1}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x+\operatorname{sen}x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+\operatorname{tg}^2x)}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{x+\operatorname{sen}x}} = e^{1/2}}$$

2A a) $\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ x = 2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x \\ f'(2) = 4 \\ f(2) = 4 \end{array}\right\}$ Ec. de la recta tangente a f en $x=2$

$$\boxed{y-4 = 4(x-2)}$$

b)



$y = x^2$

Vértice

$V(0,0)$

Tabla

x	y
1	1
-1	1
2	4
-2	4

$y-4 = 4(x-2)$

$y-4 = 4x-8$

$y = 4x-4$

x	y
0	-4
1	0

c) Puntos de corte de las dos funciones

$x^2 = 4x-4 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2$

$$A = \int_0^2 (x^2-4x+4)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{4\cdot 2^2}{2} + 4\cdot 2 = \boxed{\frac{8}{3}\,u^2}$$

3A) a) Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales, $AX=B$, es compatible si, y solo si, rango $A=$ rango $(A|B)$.

b) $$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -a \end{vmatrix} = a-12+\cancel{9}-\cancel{9}-2+6a = 7a-14=0 \Rightarrow a=2$$

Si $a=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Discusión:

Si $a\neq 2 \Rightarrow$ rango $A=$ rango$(A|B)=3=$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

Si $a=2 \Rightarrow$ rango $A=$ rango $(A|B)=2<$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I.

4A) a) El plano buscado, π, tiene como vector normal el de la recta r, que es perpendicular al vector PX, siendo X un pto genérico del plano. El producto escalar de ambos vectores es nulo y nos da la ecuación del plano pedido.

$$3x-y=4 \Rightarrow y=3x-4 \Rightarrow x-z=1 \Rightarrow z=x-1 \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-4+3\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}_r \equiv (1,3,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}_\pi=\vec{u}_r=(1,3,1) \\ \overrightarrow{PX}=(x,y,z)-(2,1,1)=(x-2,y-1,z-1) \end{array}\right\} \vec{u}_\pi \perp \overrightarrow{PX} \Rightarrow \vec{u}_\pi\cdot\overrightarrow{PX}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1,3,1)(x-2,y-1,z-1)=0 \Rightarrow x-2+3y-3+z-1=0 \Rightarrow \boxed{\pi\equiv x+3y+z-6=0}$$

b) Hallamos los puntos A, B y C del plano hallado en a, que intesectan con los ejes.

$$OX\equiv\begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \pi\equiv\alpha+3\cdot0+0-6=0 \Rightarrow \alpha=6 \Rightarrow A\begin{cases} x=6 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow A(6,0,0)$$

$$OY\equiv\begin{cases} x=0 \\ y=\beta \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \pi\equiv 0+3\beta+0-6\overset{=0}{\Rightarrow} \beta=2 \Rightarrow B\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow B(0,2,0)$$

$$OZ\equiv\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\gamma \end{cases} \Rightarrow \pi\equiv 0+3\cdot0+\gamma-6=0 \Rightarrow \gamma=6 \Rightarrow C\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow C(0,0,6)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA} = (6,0,0) \\ \overrightarrow{OB} = (0,2,0) \\ \overrightarrow{OC} = (0,0,6)\end{array}\right\} \boxed{V_{Tetraedro} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC})\right| = \frac{1}{6}72 = 12\,u^3}$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 72$$

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. Determina cómo dividir un segmento de 90 cm en dos trozos, de forma que la suma del área del semicírculo cuyo diámetro es uno de ellos y el área de un triángulo rectángulo que tiene como base el otro trozo y cuya altura es π veces su base, sea mínima. **(2.5 puntos)**
Nota: Recuerda que el área de un círculo de radio r es πr^2.

2B. Calcula las integrales

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(4x^3 - \sqrt[4]{x}\right)\,dx, \qquad \int x \ln x \; dx \qquad \textbf{(1,25 puntos por integral)}$$

3B. a) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X - A = 2A^2$, donde A y X son matrices cuadradas de orden 3. **(1 punto)**
b) Calcula X, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 punto)}$$

c) Calcula los determinantes de las matrices A^{101} y A^{1000}. **(0,5 puntos)**

4B. Dados el plano $\pi \equiv x + ay + 3z = 2$, $a \in \mathbb{R}$, y la recta

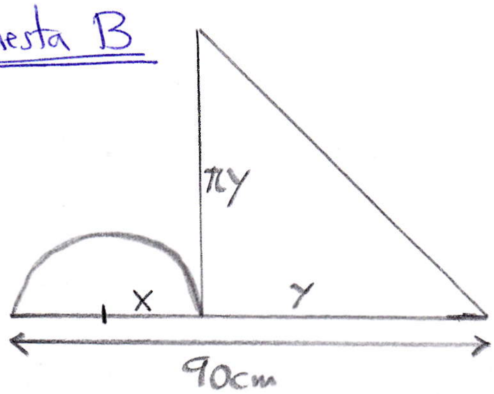
$$r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

a) Halla a para que π y r se corten perpendicularmente. **(1,25 puntos)**
b) Halla a para que π y r sean paralelos. **(1,25 puntos)**

Septiembre 2015

Propuesta B

1B



$$90 = 2x + y \Rightarrow y = 90 - 2x$$

$$A = \frac{\pi x^2}{2} + \frac{y \cdot \pi y}{2} = \frac{\pi x^2 + \pi y^2}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)$$

Sustituimos y en A:

$$A(x) = \frac{\pi}{2}\left(x^2 + (90-2x)^2\right) = \frac{\pi}{2}\left[x^2 + 8100 + 4x^2 - 360x\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(5x^2 - 360x + 8100\right)$$

$$A'(x) = \frac{\pi}{2} 5 \cdot 2x - \frac{\pi}{2} 360 = 5\pi x - 180\pi$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow 5\pi x - 180\pi = 0 \Rightarrow x = \frac{180\pi}{5\pi} = 36$$

$$A''(x) = 5\pi$$

$A''(36) > 0 \Rightarrow x = 36$ es un mínimo (relativo)

El primer trozo mide $2 \cdot 36 = 72$ cm y el segundo $90 - 2 \cdot 36 = 18$ cm.

2B

a) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\left(4x^3 - \sqrt[4]{x}\right)dx = \int \frac{4x^3 - x^{1/4}}{x^{1/2}}\,dx = \int 4x^{3-\frac{1}{2}}\,dx - \int x^{1/4 - \frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= 4\int x^{5/2}\,dx - \int x^{-1/4}\,dx = 4\frac{1}{\frac{5}{2}+1}x^{\frac{5}{2}+1} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} = \boxed{\frac{8}{7}\sqrt{x^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C}$$

b) $$\int x \ln x\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \to v = \frac{1}{2}x^2 \end{array}\right] = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C}$$

3B

a) $$AX - A = 2A^2 \Rightarrow AX = 2A^2 + A \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(2A^2 + A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = A^{-1}(2A^2 + A)}$$

b) Cálculo de $2A^2+A$

$$2A^2+A = 2\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=$$

$$=2\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\4&2&4\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3&0&2\\5&3&4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Cálculo de A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-F_3]{-F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)\xrightarrow{+2F_3+F_2}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)\xrightarrow{-2F_3+F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&2\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&0&-1\end{array}\right)$$

Cálculo de X

$$\boxed{X}=A^{-1}(2A^2+A)=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&2\\5&3&4\\0&0&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}3&0&4\\2&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}$$

"De otra forma"

$$AX-A=2A^2 \Rightarrow A(X-I)=2A^2 \Rightarrow A^{-1}A\,(X-I)=A^{-1}2A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X-I=2A \Rightarrow \boxed{X=2A+I}$$

$$\boxed{X}=2A+I=2\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&4\\2&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\boxed{\begin{pmatrix}3&0&4\\2&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}}$$

c) Calculamos A^n

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ n & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}}$$

- $$\boxed{|A^{101}|} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 101 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \boxed{-1}$$

$$\boxed{|A^{1000}|} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1000 & 1 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{1}$$

4B a) Vector director de r:

$y=2x \Rightarrow x-4x+z=-1 \Rightarrow z=-1+3x \Rightarrow r\equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{u_r}=(1,2,3)$

Vector director de π:

$\vec{u_\pi}=(1,a,3)$

$\pi \perp r \Rightarrow \vec{u_\pi}\cdot\vec{u_r}=0 \Rightarrow (1,a,3)\cdot(1,2,3)=0 \Rightarrow 1+2a+9=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a=-5}$

b) $\pi \parallel r \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{2}{a}=\frac{3}{3} \Rightarrow \boxed{a=2}$