



Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Se quiere construir un depósito de chapa abierto superiormente con forma de prisma recto de base cuadrada, de $1000m^3$ de capacidad, lo más económico posible. Sabiendo que:

- El coste de la chapa usada para los laterales es de 100 euros el metro cuadrado
- El coste de la chapa usada para la base es de 200 euros el metro cuadrado

¿Qué dimensiones debe tener el depósito?

¿Cuál es el precio de dicho depósito? **(2,5 puntos)**

2A. Dada la función

$$g(x) = (x + b) \cos x, \quad b \in \mathbb{R}.$$

a) Calcula la primitiva $G(x)$ de $g(x)$ que verifica que $G(0) = 1$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula el valor de $b \in \mathbb{R}$ sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - g'(x)}{x} = -2. \quad \textbf{(1,25 puntos)}$$

3A. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué dimensión debe tener una matriz X para poder efectuar el producto matricial $A \cdot X \cdot B$? **(0,5 puntos)**

b) Despeja X en la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B + C = D$. **(1 punto)**

c) Calcula la matriz X . **(1 punto)**

4A. Dadas las rectas

$$r \equiv 2 - x = y - 2 = \frac{z}{3} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = c - 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

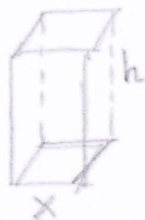
donde $c \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y s en función del parámetro $c \in \mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**

b) Hallar el punto de intersección de r y s cuando dichas rectas sean secantes. **(1 punto)**

Propuesta A

1A



x = lado de la base del depósito

h = altura del depósito

$$1000 = x^2 h \Rightarrow h = \frac{1000}{x^2}$$

$$P \equiv \text{precio} = 200x^2 + 100 \cdot 4 \cdot xh$$

$$P = 200x^2 + 400x \cdot \frac{1000}{x^2}$$

$$P(x) = 200x^2 + \frac{400000}{x}$$

Hay que minimizar $P(x)$:

$$P'(x) = 400x - \frac{400000}{x^2} = \frac{400x^3 - 400000}{x^2}$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 400x^3 - 400000 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{400000}{400}} = 10$$

$$P''(x) = 400 + \frac{400000}{x^3}$$

$$P''(10) = 400 + \frac{400000}{10^3} > 0 \Rightarrow x = 10 \text{ es un m.ín. (relativo)}$$

Solución: las dimensiones del depósito son $10 \times 10 \times 10$ m

y el precio del mismo es $P(10) = 200 \cdot 10^2 + \frac{400000}{10} = \underline{\underline{60000 \text{ €}}}$

2A) $g(x) = (x+b) \cos x$ con $b \in \mathbb{R}$

$$G(x) = \int (x+b) \cos x dx = \int x \cos x dx + b \int \cos x dx \quad \textcircled{1}$$

$$\int x \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \sin x \end{array} \right] = x \sin x - \int \sin x dx =$$

$$= x \sin x + \cos x$$

$$\stackrel{\textcircled{1}}{=} x \sin x + \cos x + b \sin x + C$$

$$G(0) = 1 \Rightarrow 0 \sin 0 + \cos 0 + b \sin 0 + C = 1 \Rightarrow C = 0$$

$$\boxed{G(x) = x \sin x + \cos x + b \sin x = (x+b) \sin x + \cos x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - g'(x)}{x} = -2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+b)\sin x + \cos x - [\cos x - (x+b)\sin x]}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+b)\sin x + \cos x - \cos x + (x+b)\sin x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+b)\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2[\sin x + (x+b)\cos x]}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2[\sin x + (x+b)\cos x] = 2b = -2 \Rightarrow \boxed{b = -1} \end{aligned}$$

3A) a) $A_{2 \times 2} X_{\boxed{2 \times 3}} B_{3 \times 3}$ tiene que tener dimensión 2×3

$$\begin{aligned} b) AXB = D - C &\Rightarrow A^{-1}AXB = A^{-1}(D - C) \Rightarrow XB = A^{-1}(D - C) \Rightarrow \\ &\Rightarrow XBB^{-1} = A^{-1}(D - C)B^{-1} \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}(D - C)B^{-1}} \end{aligned}$$

$$c) |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

4A a) Puestas las rectas en ecs. paramétricas, e igualando los valores de los puntos genéricos, tendremos un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas.

Si el sistema es compatible determinado, las rectas son secantes y se cortan en un punto.

Si el sistema es compatible indeterminado, las rectas son coincidentes.

Si el sistema es incompatible, las rectas son paralelas o se cruzan.

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = y-2 = \frac{z}{3} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2-\mu \\ y = 2+\mu \\ z = 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-\mu = -1+2\lambda \\ 2+\mu = -1+\lambda \\ 3\mu = c-3\lambda \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = c-3\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu = 3 \\ \lambda - \mu = 3 \\ 3\lambda + 3\mu = c \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & c \end{pmatrix}$$

$$|(A|b)| = -2c + 9 + 9 + 9 - 18 - c = 0 \Rightarrow c = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Discusión: Si $c \neq 3 \Rightarrow \text{rango } A = 2 < 3 = \text{rango}(A|b) \Rightarrow$ las rectas son paralelas o se cruzan, pero como $\frac{-1}{2} \neq \frac{1}{1}$ (no son proporcionales) $\Rightarrow$ las rectas se cruzan.

Si $c = 3 \Rightarrow \text{rango } A = \text{rango}(A|b) = n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ las rectas son secantes

b) Si $c = 3$, se tiene:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} -2F_1 + F_2 \\ -3F_1 + F_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

$$\text{De } [2]: 3\mu = -3 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \begin{cases} x = 2 - (-1) \\ y = 2 + (-1) \\ z = 3 \cdot (-1) \end{cases} = \boxed{(3, 1, -3)} \text{ (punto de intersección)}$$



PROPUESTA B

1B. Dada la función

$$f(x) = 2xe^{1-x}$$

se pide:

- a) Estudiar si tiene asíntotas horizontales **(1,25 puntos)**
- b) Calcular sus puntos de inflexión. **(1,25 puntos)**

2B. Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = 3 - x$, se pide:

- a) Esbozar la región encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. **(0,5 puntos)**
- b) Calcular el área de la región anterior. **(2 puntos)**

3B. a) Enuncia el Teorema de Rouché-Fröbenius. **(0,5 puntos)**

- b) Razona que un sistema de tres ecuaciones lineales con cuatro incógnitas no puede ser compatible determinado. **(0,5 puntos)**
- c) Determina para qué valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 2t = 2 \\ 5x + y + 2z = 1 \\ x + 8y - 5z + 6t = a \end{cases}$$

es incompatible. **(1,5 puntos)**

4B. Dados los planos

$$\pi \equiv 2x - 3y + z = 0 \quad \text{y} \quad \pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2 + 2\lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

y el punto $P(2, -3, 0)$, se pide:

- a) Hallar la ecuación continua de la recta r que pasa por P y es paralela a la recta s determinada por la intersección de π y π' . **(1,5 puntos)**
- b) Calcular el ángulo entre los planos π y π' . **(1 punto)**

Septiembre 2016

Cipri

Propuesta B

1B) a) $f(x) = 2x e^{1-x}$

$$y = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x e^{1-x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0$$

$\Rightarrow y=0$ es una A.H.

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{e^{-x-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x e^{x+1} = -\infty$$

$\Rightarrow$ ~~A.H.~~ cuando $x \rightarrow -\infty$

b) $f'(x) = 2e^{1-x} + 2x e^{1-x}(-1) = e^{1-x}(2-2x)$

$$f''(x) = -e^{1-x}(2-2x) + e^{1-x}(-2) = e^{1-x}[-2+2x-2] = e^{1-x}[2x-4]$$

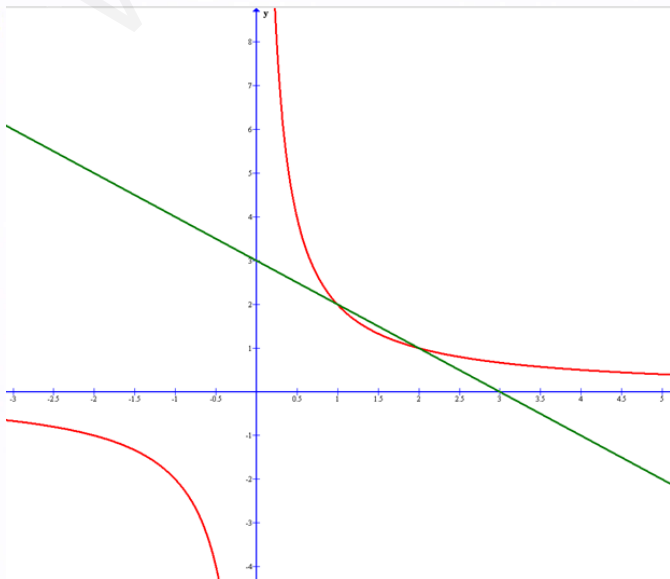
$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^{1-x}(2x-4) = 0 \Rightarrow 2x-4=0 \Rightarrow x=2$$

$$f'''(x) = -e^{1-x}(2x-4) + e^{1-x} \cdot 2$$

$$f'''(2) = -e^{1-2}(2 \cdot 2 - 4) + e^{1-2} \cdot 2 \neq 0 \Rightarrow x=2 \text{ es un punto de inflexión}$$

Punto de inflexión $(2, f(2)) = (2, \frac{4}{e})$

2B)



$$y = \frac{2}{x}$$

$$y = 3 - x$$

x	y
1	2
10	0,2
-1	-2
-10	-0,2

x	y
0	3
3	0

A.H. $y=0$

A.V. $x=0$

b) Puntos de corte de las funciones: $f(x) = g(x)$

$$\frac{2}{x} = 3 - x \Rightarrow 2 = 3x - x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$A = \int_1^2 \left[(3-x) - \frac{2}{x} \right] dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2 \log x \right]_1^2 =$$

$$= 3 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2 \log 2 - \left(3 - \frac{1}{2} - 2 \log 1 \right) = \boxed{\frac{3}{2} - 2 \log 2} \text{ u}^2$$

donde $\log$ es el logaritmo natural o neperiano.

3B) a) Teorema de Rouché-Fröbenius

Un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ es compatible si, y solo si, $\text{rango } A = \text{rango } (A|B)$.

b) Para que un sistema de ecuaciones lineales 3×4 , $AX = B$, sea compatible determinado se tendrían que cumplir:

$$\text{rango } A = \text{rango } (A|B) = \text{n}^\circ \text{ incógnitas}$$

pero la última igualdad es falsa, porque el $\text{rango } (A|B) \leq 3$.

$$c) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & | & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 1 & 8 & -5 & 6 & | & a \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & 6 & a \end{vmatrix} = 24 - 10 + 6 - 4a = 0 \Rightarrow a = 5$$

Discusión:

Si $a \neq 5 \Rightarrow \text{rango } A = 2 < 3 = \text{rango } (A|B) \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$

Si $a = 5 \Rightarrow \text{rango } A = 2 = \text{rango } (A|B) < \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{S.C. Indeterminado}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & -5 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

4B) a) $\pi \equiv 2x - 3y + z = 0$, $\pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2 + 2\lambda + \mu \end{cases}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
 $P(2, -3, 0)$

$\Gamma \equiv \begin{cases} P \\ \vec{u}_r = \vec{u}_\pi \times \vec{u}_{\pi'} \end{cases}$ (vector director de la recta intersección de los planos)

$\vec{u}_\pi = (2, -3, 1)$, $\vec{u}_{\pi'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} - \vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j} =$
 $= 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (3, 1, -2)$

$\vec{u}_r = \vec{u}_\pi \wedge \vec{u}_{\pi'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 2\vec{k} + 3\vec{j} + 9\vec{k} - \vec{i} + 4\vec{j} =$
 $= 5\vec{i} + 7\vec{j} + 11\vec{k} = (5, 7, 11)$

$$\Gamma \equiv \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{7} = \frac{z}{11}$$

b) $\cos \alpha = \frac{|\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_{\pi'}|}{|\vec{u}_\pi| |\vec{u}_{\pi'}|} = \frac{|(2, -3, 1) \cdot (3, 1, -2)|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{14}$

$\Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{14} = 85^\circ 54' 14,24''$