Junio 2018

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2018

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x) = x^{15} + x + 1$ corta al eje OX al menos una vez en el intervalo [-1,1]. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real. **(1 punto)**

2A. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^2 - 1)\cos x \, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2}\, dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $e^x = t$.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & az & = & 4 \\ x & + & ay & + & z & = & 2 \\ x & + & 4y & - & 5z & = & 6 \end{array}\right\}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$. **(1 punto)**

4A. Dado el plano $\alpha \equiv 4x + 2y + 4z - 15 = 0$ y el punto $A(2, -3, 1)$:
a) Calcula la distancia del punto A al plano α. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto A al plano α. **(1,5 puntos)**

5A. a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3 % de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4 % de defectuosos y la C produce 800 con un 2 % de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.
a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso. **(0,75 puntos)**
a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".
b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X. **(0,75 puntos)**
b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Junio de 2018

Cipri

Propuesta A

1A) a) Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario, entonces $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.

La función $f(x) = x^{15} + x + 1$ es una función polinómica, luego continua en $\mathbb{R}$, y por tanto, continua en $[-1,1]$.

Además, $f(-1) = -1 < 0$

$f(1) = 3 > 0$

luego aplicando el teorema de Bolzano $\exists c \in (-1,1)$ tal que $f(c) = 0$, esto es, f se anula al menos una vez en $[-1,1]$.

b) Como $f'(x) = 15x^{14} + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, f es creciente y, por lo tanto, solo corta al eje OX en el punto que da el teorema de Bolzano. Esto es, f solo corta al eje OX una vez.

2A) a) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x^2-1)\cos x\, dx$

$$\int (x^2-1)\cos x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2-1 \longrightarrow du = 2x\,dx \\ dv = \cos x\, dx \longrightarrow v = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x \end{array}\right] =$$

$$= (x^2-1)\operatorname{sen} x - \int 2x \operatorname{sen} x\, dx = \left[\begin{array}{l} u = x \longrightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \longrightarrow v = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x \end{array}\right] =$$

$$= (x^2-1)\operatorname{sen} x - \left[-x\cos x - \int -\cos x\, dx\right] = (x^2-1)\operatorname{sen} x + x\cos x - \operatorname{sen} x$$

$$\int_0^{\pi} (x^2-1)\cos x\, dx = \Big[(x^2-1)\operatorname{sen} x + x\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi} =$$

$$= \left((\pi^2-1)\operatorname{sen}\pi + \pi\cos\pi - \operatorname{sen}\pi\right) - \left((0^2-1)\operatorname{sen} 0 + 0\cos 0 - \operatorname{sen} 0\right) = \boxed{-2\pi}$$

b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,dx = \left[\begin{array}{l} t=e^x \\ dt = e^x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{1}{t^2+t-2}\,dt \overset{(1)}{=}$

$\dfrac{1}{t^2+t-2} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{t+2} = \dfrac{(t+2)A + (t-1)B}{(t-1)(t+2)} \Rightarrow (t+2)A + (t-1)B = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow tA + tB + 2A - B = 1 \Rightarrow$

$t^2+t-2=0 \Rightarrow t = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=0 \end{cases} \Rightarrow (A,B) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{t^2+t-2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{t-1} + \dfrac{-\frac{1}{3}}{t+2}$

$\overset{(1)}{=} \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{3}\int \frac{1}{t+2}\,dt = \frac{1}{3}\log|t-1| - \frac{1}{3}\log|t+2| =$

$= \boxed{\dfrac{1}{3}\left(\log(e^x-1) - \log(e^x+2)\right) + C}$

3A a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -a & 4 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right)$

$|A| = -5a - 4a + 3 + a^2 - 4 + 15 = a^2 - 9a + 14$

$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 9a + 14 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 2 \\ 7 \end{cases}$

$\boxed{a=2}$: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ rango $(A|b) = 2$

$\boxed{a=7}$: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+4F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 16 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rango $(A|b) = 3$

Discusión

• Si $a \neq \begin{cases} 2 \\ 7 \end{cases} \Rightarrow$ rango $A = 3 =$ rango $(A|b) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (tª de Rouché-Fröbenius) Sistema Compatible Determinado.

• Si $a = 2 \Rightarrow$ rango $A = 2 =$ rango $(A|b) < 3 =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (tª de Rouché-Fröbenius) Sistema Compatible Indeterminado.

• Si $a = 7 \Rightarrow$ rango $A = 2 \neq 3 =$ rango $(A|b) \Rightarrow$ (tª de Rouché-Fröbenius)

Sistema Incompatible.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{apart. a)}} \cdots \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ \end{array}$

Llamamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$

De [2]: $-y + 3\lambda = -2 \Rightarrow y = 2 + 3\lambda$

Sustituimos en [1]: $x + 3y - 2\lambda = 4 \Rightarrow x = 4 - 3(2+3\lambda) + 2\lambda =$
$= 4 - 6 - 9\lambda + 2\lambda = -2 - 7\lambda$

Soluciones: $\boxed{(x,y,z) = (-2-7\lambda,\ 2+3\lambda,\ \lambda) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$

4A a) $d(A,\pi) = \dfrac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \dfrac{|4\cdot 2 + 2\cdot(-3) + 4\cdot 1 - 15|}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}} = \boxed{\dfrac{3}{2}\ u}$

b) Dicho lugar geométrico está formado por todos los puntos $X(x,y,z)$ tales que $d(X,\pi) = \frac{3}{2}$

$$d(X,\pi) = \frac{|4x+2y+5z-15|}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow |4x+2y+5z-15| = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+2y+4z-15 = 9 \\ -4x-2y-4z+15 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+2y+4z-24 = 0 \\ -4x-2y-4z+6 = 0 \end{cases} \text{(dos planos paralelos)}$$

Así, el lugar geométrico es el formado por los dos planos paralelos al plano π.

5A a) Nombramos los sucesos:

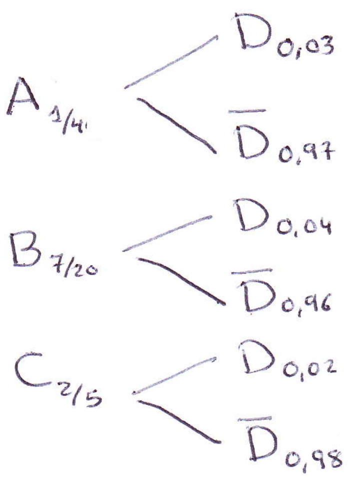
A = condensador producido por la máquina A $\longrightarrow P(A) = \frac{500}{2000} = \frac{1}{4}$

B = " " " " " B $\longrightarrow P(B) = \frac{700}{2000} = \frac{7}{20}$

C = " " " " " C $\longrightarrow P(C) = \frac{800}{2000} = \frac{2}{5}$

$500 + 700 + 800 = 2000$

D = el condensador es defectuoso



a1) $P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = \frac{1}{4}\cdot 0{,}03 + \frac{7}{20}\cdot 0{,}04 + \frac{2}{5}\cdot 0{,}02 =$

$= \frac{59}{2000} = 0{,}0295$ es la probabilidad de que sea defectuoso el condensador.

a2) $$P(A/D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 0{,}03}{\frac{59}{2000}} = \boxed{\frac{15}{59}}$$

es la probabilidad de que sea defectuoso si lo ha producido la máquina A.

b) X = nº de múltiplos de 3 que pueden salir

$X \rightsquigarrow B\left(5, \frac{2}{6}\right) \begin{cases} n = 5 \\ p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$ ya que los múltiplos de 3 son 3 y 6

b1) Media: $EX = np = 5\frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$

Desviación típica: $\sigma = +\sqrt{npq} = \sqrt{5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \boxed{\sqrt{\frac{10}{9}}}$

b2) $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}0412 + 0{,}0041 = \boxed{0{,}0453}$

mirando la tabla

Junio 2018

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2018

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [1,3]. **(0,75 puntos)**
b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto (1,3) cuya existencia asegura el teorema de Rolle. **(0,75 puntos)**
c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y = 4x + 2$. **(1 punto)**

2B. Dadas las funciones $f(x) = 2x\,e^{-x}$ y $g(x) = x^2\,e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones. **(2,5 puntos)**

3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 punto)}$$

b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. **(1 punto)**
c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $|A^{-1}|$ y $|2A|$. **(0,5 puntos)**

4B. Dados los vectores $\vec{u} = (0,1,1), \vec{v} = (1,1,-1)$ y $\vec{w} = (2,0,3)$:
a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u} - \lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**
b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**
c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2,0,2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

5B. a) El 60 % del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30 % vota a A, el 50 % a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencia son: el 10 % vota a A, el 60 % a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Ser hombre y votante de C. **(0,75 puntos)**
a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer. **(0,5 puntos)**

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

b1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. **(0,75 puntos)**
b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Junio de 2018

Cipri

Propuesta B

1B a) $f(x)=x^3-5x^2+7x+a$

Como f es una función polinómica, es continua y derivable en $\mathbb{R}$, luego en particular es continua en $[1,3]$ y derivable en $(1,3)$.

Veamos que $f(1)=f(3)$:

$f(1)=1-5+7+a=3+a$

$f(3)=27-5\cdot 9+7\cdot 3+a=3+a$

Por tanto, f cumple las hipótesis del teorema de Rolle $\forall a\in\mathbb{R}$, en $[1,3]$

b) $f'(x)=3x^2-10x+7 \underset{\text{t}^{\text{a}}\text{ de Rolle}}{=} 0 \Rightarrow x=\begin{cases}1\\ 7/3\end{cases}$

Luego el punto pedido es $\boxed{c=\frac{7}{3}\in(1,3)}$

c) $y=4x+2 \Rightarrow m=4$ (pendiente)

$f'(x)=4 \Rightarrow 3x^2-10x+7=4 \Rightarrow 3x^2-10x+3=0 \Rightarrow x=\begin{cases}1/3\notin[1,3]\\ 3\end{cases}$

El punto pedido es $\boxed{(3,f(3))=(3,3)}$

2B $f(x)=2xe^{-x}$

$g(x)=x^2e^{-x}$

Puntos de corte: extremos de integración.

$2xe^{-x}=x^2e^{-x} \Rightarrow (2x-x^2)e^{-x}=0 \Rightarrow \begin{cases}2x-x^2=0 \Rightarrow x=\begin{cases}0\\2\end{cases}\\ e^{-x}=0 \quad \text{Nunca}\end{cases}$

Área

$$A=\int_0^2\left(2xe^{-x}-x^2e^{-x}\right)dx=\int_0^2(2x-x^2)e^{-x}dx=\boxed{F(2)-F(0)=4e^{-2}\ u^2}$$

$$\int(2x-x^2)e^{-x}dx=\begin{bmatrix}u=2x-x^2\longrightarrow du=(2-2x)dx\\ dv=e^{-x}dx\longrightarrow v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{bmatrix}=$$

$$=-(2x-x^2)e^{-x}+\int(2-2x)e^{-x}dx=\begin{bmatrix}u=2-2x\longrightarrow du=-2dx\\ dv=e^{-x}dx\longrightarrow v=-e^{-x}\end{bmatrix}=$$

$$= -(2x-x^2)e^{-x} - (2-2x)e^{-x} - \int 2e^{-x}\,dx =$$

$$= -(2x-x^2)e^{-x} - (2-2x)e^{-x} + 2e^{-x} = x^2e^{-x} = F(x)$$

$$F(0) = 0$$
$$F(2) = 4e^{-2}$$

3B a) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a-2) + a + a(a-2) = 3a^2 - 7a + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \begin{cases} 4/3 \\ 1 \end{cases}$$

Así, $\boxed{\exists A^{-1} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{1, \frac{4}{3}\}}$

b) $a = 2$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-4F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_1}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Comprobación:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

c) $a=0$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=4$$

$$\boxed{|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{4}} \quad y \quad \boxed{|2A|=2^3\,|A|=32}$$

4B $\vec{u}=(0,1,1)$, $\vec{v}=(1,1,-1)$ y $\vec{w}=(2,0,3)$

a) $\vec{u}-\lambda\vec{v}=(0,1,1)-\lambda(1,1,-1)=(-\lambda,\,1-\lambda,\,1+\lambda)$

$(\vec{u}-\lambda\vec{v})\perp\vec{w} \iff (\vec{u}-\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}=0$

$(\vec{u}-\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}=(-\lambda,\,1-\lambda,\,1+\lambda)\cdot(2,0,3)=-2\lambda+3+3\lambda=\lambda+3=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\lambda=-3}$

b) $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son l.d. $\iff [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0 \iff \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & +1 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=-2-2-3=-7\neq 0\Rightarrow \boxed{\text{no son l.d.}}$$

c) Dicha recta está determinada por el punto $P(2,0,2)$ y el vector normal al plano $\pi\equiv\{P,\vec{u},\vec{v}\}$

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x-2 & 0 & 1\\ y & 1 & 1\\ z-2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -(x-2)+y-(z-2)-(x-2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+2+y-z+2-x+2=0$$

$$\pi\equiv -2x+y-z+6=0\Rightarrow \vec{n}_\pi=(-2,1,-1)$$

La recta pedida es

$$r\equiv\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y}{1}\Rightarrow x+2y-2=0\\[2mm] \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}\Rightarrow -x+2z-2=0\end{cases}\equiv r$$

$$\boxed{\begin{cases}x+2y-2=0\\ -x+2z-2=0\end{cases}\equiv r}$$

5B Nombramos los sucesos

a)

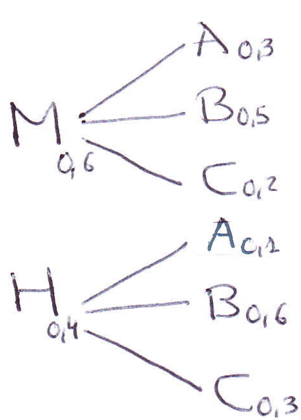
$M=$ ser mujer

$H=$ ser hombre

$A=$ votar al partido A

$B=$ " " " B

$C=$ " " " C



a1) $P(H \cap C) = P(H)\,P(C/H) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = \boxed{0{,}12}$

a2) $P(M/B) = \dfrac{P(M \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}5}{0{,}54} = \boxed{0{,}\overline{5}}$

$$P(B) = P(M)\,P(B/M) + P(H)\,P(B/H) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}54$$

b) X = nota obtenida , $X \sim N(4{,}05\,,\ 2{,}5)$

b1) $P(X > 5) = P\left(Z > \dfrac{5 - 4{,}05}{2{,}5}\right) = P(Z > 0{,}38) = 1 - P(Z \leq 0{,}38) =$

$= 1 - 0{,}6480 = 0{,}3520$

$\uparrow$

mirando en la tabla

$0{,}3520 \cdot 1000 =$ $\boxed{\text{352 opositores han superado el 5}}$

b2) $1000 - 330 = 670$

$P(Z < z) = 0{,}670 \Rightarrow$ (buscando en la tabla) $z = 0{,}44 \Rightarrow \dfrac{x - 4{,}05}{2{,}5} = 0{,}44 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0{,}44 \cdot 2{,}5 + 4{,}5 = 5{,}15$

Por tanto, $\boxed{\text{la nota de corte es } 5{,}15.}$