Julio 2019

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. **(1,5 puntos)**
b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x) = x\, e^{-x}$. **(1 punto)**

2A. a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 16 - x^2$ y $g(x) = (x+2)^2 - 4$. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$. **(1 punto)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & (a-2)y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -4 \\ x & - & 3y & + & az & = & -a^2 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 3$. **(1 punto)**

4A. Dada la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{array}\right. \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π. **(1,25 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r. **(1,25 puntos)**

5A. a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son P(A)=0,75 y P(B)=0,35. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si A y B fuesen independientes. **(0,75 puntos)**

a2) Si $P(A \mid B) = 0,6$. **(0,5 puntos)**

Nota: $P(A \mid B)$ denota la probabilidad condicionada.

b) El 1 % de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima. **(0,75 puntos)**

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Propuesta A

1A a) $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}$

$\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R}-\{x : x^2-1=0\}=\mathbb{R}-\{\pm 1\}}$, por ser racional.

¡Esta función NO es discontinua en ningún punto!, ya que para que una función sea discontinua en un punto, tiene que estar definida en ese punto.

Supongo que preguntarán por la "discontinuidad" de f en $x=\pm 1$:

$\boxed{x=1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\underset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{6x^2-2x-1}{2x}=\frac{3}{2}$$

(también se podrían haber factorizado el numerador y el denominador, y haber simplificado)

$\boxed{f \text{ tiene en } x=1 \text{ una "discontinuidad" evitable, definiendo } f(1)=\frac{3}{2}}$

$\boxed{x=-1}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\left[\frac{-2}{0}\right]\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty\end{cases}$$

$\boxed{f \text{ tiene en } x=-1 \text{ una "discontinuidad" asintótica}}$

b) $g(x)=xe^{-x}$

$g'(x)=e^{-x}+xe^{-x}(-1)=e^{-x}(1-x)$

$g'(x)=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$

$g''(x)=e^{-x}(-1)(1-x)+e^{-x}(-1)=e^{-x}(x-2)$

$g''(1)\neq 0$ (de hecho, <0)

$\boxed{\text{Las coordenadas del extremo relativo (máximo) de } g \text{ son } (1,g(1))=\left(1,\frac{1}{e}\right)}$

2A

a) $f(x) = 16 - x^2$

$g(x) = (x+2)^2 - 4$

$f(x) = 16 - x^2$

Vértice: $\left.\begin{array}{l} x_v = \frac{-b}{2a} = 0 \\ y_v = 16 - 0^2 = 16 \end{array}\right\} V_f(0,16)$

Puntos de corte con OX

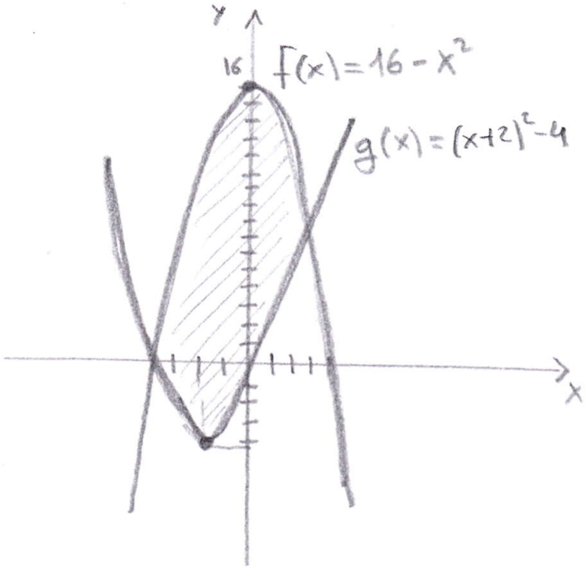
$16 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$

$g(x) = (x+2)^2 - 4$

Vértice: $V_g(-2,-4)$

Puntos de corte con OX

$(x+2)^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ -4 \end{cases}$



Puntos de corte de f y g

$f(x) = g(x) \Rightarrow 16 - x^2 = (x+2)^2 - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 16 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$

Área

$$A = \int_{-4}^{2} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-4}^{2} (2x^2 + 4x - 16)\,dx =$$

$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 16x \Big|_{-4}^{2} = \boxed{72\ u^2}$$

b) Ecuación de la recta tangente

$\left.\begin{array}{l} y - f(a) = f'(a)(x-a) \\ f(x) = 16 - x^2 \Rightarrow f(1) = 15 \\ f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = -2 \end{array}\right\} \boxed{y - 15 = -2(x-1)}$

3A

a) Discusión

$\left.\begin{array}{l} x - (a-2)y - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + az = -a^2 \end{array}\right\}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -(a-2) & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -(a-2) & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & a & -a^2 \end{pmatrix}$

$|A| = -2a + 3 - (a-2) - 2 + 3 + (a-2)a =$

$= a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

Caso $\boxed{a=2}$: $\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rg(A) = 2 \neq rg(\tilde{A}) = 3$

Caso $\boxed{a=3}$: $\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow rg(A) = 2 = rg(\tilde{A})$

Discusión

Si $a \neq \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \Rightarrow rg(A) = 3 = rg(\tilde{A}) = n^{\circ}$ de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

Si $a = 2 \Rightarrow rg(A) = 2 \neq rg(\tilde{A}) = 3 \Rightarrow$ S.I.

Si $a = 3 \Rightarrow rg(A) = 2 = rg(\tilde{A}) < 3 = n^{\circ}$ de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I.

b) Resolución para $a=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 3 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ \end{array}$$

Llamamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$.

Sustituimos en [2]: $-y + 2\lambda = -5 \Rightarrow y = 2\lambda + 5$

Sustituimos en [1]: $x - (2\lambda+5) - \lambda = 1 \Rightarrow x = 3\lambda + 6$

$\boxed{\text{Soluciones: } (x,y,z) = (3\lambda+6,\ 2\lambda+5,\ \lambda) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$

4A $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$, $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

De otra forma al final

Escribimos la recta como intersección de dos planos

$r \equiv \left.\begin{array}{l} x-1 = -y \\ 2y = z \end{array}\right\}$

Escribimos el plano en forma general: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi \equiv 2x - 2y - 2 = 0$

Formamos el sistema y lo discutimos: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2y - z = 0 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 2 \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 3 = rg(\tilde{M}) \Rightarrow$ S.C.D. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{r \text{ y } \pi \text{ se cortan en un punto}}$

b) Dicho plano está determinado por $\{P_r, \vec{u}_r, \vec{n}_\pi\}$

$$\left.\begin{array}{l} P_r(1,0,0) \\ \vec{u}_r = (-1,1,2) \\ \vec{n}_\pi = (2,-2,0) \end{array}\right\} \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ y & 1 & -2 \\ z & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' \equiv 4x+4y-4=0$$

$$\boxed{\pi' \equiv x+y-1=0}$$

5A a) $P(A)=0{,}75$, $P(B)=0{,}35$

a1) A y B independientes $\Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = 0{,}75\cdot 0{,}35 =$
$= 0{,}2625$

$$\boxed{P(A\cup B)} = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = 0{,}75+0{,}35-0{,}2625 = \boxed{0{,}8375}$$

a2) $P(A/B) = 0{,}6 \Rightarrow P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B) =$

$= P(A/B)P(B) = 0{,}6\cdot 0{,}35 = 0{,}21$

$$\boxed{P(A\cup B)} = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = 0{,}75+0{,}35-0{,}21 = \boxed{0{,}89}$$

b) X = nº de cheques que recibe el banco y no tienen fondos

$X \sim B(5,\ 0{,}01)$

b1) $\boxed{P(A)} = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(X=0) \underset{\text{mirando en la tabla}}{=} 1-0{,}9510 = \boxed{0{,}05}$

A = algún cheque sin fondos

$\bar{A}$ = ningún cheque sin fondos

b2) $\boxed{P(X\geq 3)} = P(X=3) + P(X=4)+P(X=5) \underset{\text{mirando en la tabla}}{=} 0+0+0 = \boxed{0}$

$\mathbb{C}\vec{i}p\vec{r}i$

$\boxed{4A}$ a) $r \equiv \{P, \vec{u}_r\}$, $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$

$\vec{n}_\pi = (A, B, C)$

Posiciones relativas

- $\vec{u}_r \not\perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow r$ y π son secantes (se cortan en un punto)
- $\vec{u}_r \perp \vec{n}_\pi$ $\begin{cases} P \in \pi \Rightarrow r \subset \pi \text{ (r contenida en } \pi) \\ P \notin \pi \Rightarrow r \parallel \pi \text{ (r y } \pi \text{ son paralelos)} \end{cases}$

$\vec{u}_r = (-1, 1, 2)$

$$\vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} + 2\vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} = (2, 2, -2)$$

$\vec{u}_r \cdot \vec{n}_\pi = (-1, 1, 2) \cdot (2, 2, -2) = -4 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_r \not\perp \vec{n}_\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ r y π son secantes.

www.yoquieroaprobar.es

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. a) Demuestra que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$. **(1 punto)**

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{-x}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**
b) Para $a = 1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de a, b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1,5 puntos)**
b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos $Q(1, 5, 5)$ y $R(0, 4, 2)$ pertenecen o no a la recta. **(1 punto)**

5B. a) En la sala de pediatría de un hospital el 70 % de los pacientes son niñas. De los niños el 40 % son menores de 36 meses y de las niñas el 30 % tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) Que no tenga menos de 36 meses. **(0,75 puntos)**
a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. **(0,5 puntos)**

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:
b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. **(0,75 puntos)**
b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Propuesta B

B1 a) $\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0$ una solución en $[0, \pi]$

Consideramos $f(x) = \operatorname{sen} x - 2x + 1$ que verifica:

1) f es continua en $\mathbb{R}$ (luego en particular en $[0,\pi]$) por ser suma de funciones continuas.

2) $f(0) = \operatorname{sen} 0 - 2\cdot 0 + 1 = 1 > 0$

$f(\pi) = \operatorname{sen}\pi - 2\pi + 1 = 0 - 2\pi + 1 < 0$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0,\pi)$ t.q. $f(c) = 0$, esto es, $\boxed{\text{la ecuación } \operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0 \text{ tiene una solución en } (0,\pi)}$.

b) $f'(x) = \cos x - 2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ya que $|\cos x| \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, luego f es estrictamente decreciente y, como consecuencia, solo tiene una solución real. En particular, $\boxed{\text{tiene una única solución en } [-200, 200]}$.

B2 a) $\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx$

$$\int (x+1)e^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x+1 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] = -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x}\,dx =$$

$$= -(x+1)e^{-x} - e^{-x} = (-x-2)e^{-x}$$

$$\boxed{\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx = \left[(-x-2)e^{-x}\right]_0^1 = -3e^{-1} - (-2) = 2 - \frac{3}{e}}$$

b) $$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx} = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \\ t^2 = x \end{array}\right] = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 2\operatorname{arctg} t = \boxed{2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C}$$

B3 $$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = a(a+2) = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Conclusión}}: \text{ Si } a \neq \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow \text{rango } A = 3 \\ \qquad\qquad\quad \text{Si } a = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow \text{rango } A = 2 \end{array}}$$

b) $XA = B - X \Rightarrow XA + X = B \Rightarrow X(A+I) = B \Rightarrow$

$\Rightarrow X(A+I)(A+I)^{-1} = B(A+I)^{-1} \Rightarrow \boxed{X = B(A+I)^{-1}}$

Para $a = 1$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 : 2]{-2F_1 + F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{16}F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/16 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 : (-8)}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/16 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 0 & 1/4 \end{array}\right) \xrightarrow{-4F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/16 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/8 & 0 & 1/4 \end{array}\right) = \left(I \mid (A+I)^{-1}\right)$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/16 & 1/2 & -1/8 \\ -1/8 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 1/4 \\ 1/16 & 1/2 & -1/8 \end{pmatrix}}$$

B4 a) $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$, $\vec{w} = (2, 5, c)$ t.q. $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \end{cases}$

$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (-1, 0, -2) \cdot (a, b, 1) = 0 \Rightarrow -a - 2 = 0 \Rightarrow a = -2$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & b & 1 \end{vmatrix} = 2b\vec{i} + 5\vec{j} - b\vec{k} = (2b, 5, -b) =$$

$$= (2, 5, c) \Rightarrow \begin{cases} 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \\ 5 = 5 \\ c = -b \Rightarrow c = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{(a, b, c) = (-2, 1, -1)}$

b) r t.q. $\begin{cases} P(-1,3,1) \in r \\ r \perp \pi \equiv x+y+2z-3=0 \end{cases}$

El vector normal a π es un vector director de r:

$\vec{n}_{\pi} = (1,1,2) = \vec{u}_r$

y, por tanto, la recta es $\boxed{r \equiv \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 3+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$

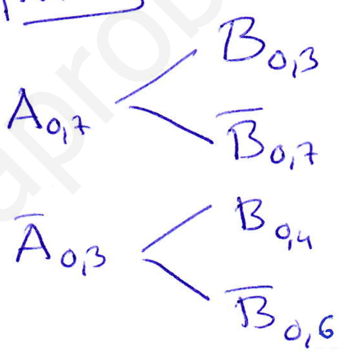
¿$Q(1,5,5)$ y $R(0,4,2)$ están en r?

$r \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} Q(1,5,5) \Rightarrow \dfrac{1+1}{1} = \dfrac{5-3}{1} = \dfrac{5-1}{2} \checkmark \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{Q \in r} \\ R(0,4,2) \Rightarrow \dfrac{0+1}{1} = \dfrac{4-3}{1} \neq \dfrac{2-1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{R \notin r} \end{cases}$

$\boxed{B5}$ a) A = paciente niña

$\bar{A}$ = paciente niño

B = tienen menos de 36 meses



a1) $\boxed{P(\bar{B})} = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) =$

$= P(A)P(\bar{B}/A) + P(\bar{A})P(\bar{B}/\bar{A}) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 =$

$\boxed{= 0{,}67}$

a2) $\boxed{P(A/B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)P(B/A)}{P(B)} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{0{,}33} = \boxed{0{,}\overline{63}}$

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0{,}67 =$
$= 0{,}33$

b) X = puntuación obtenida en el test

$X \sim N(60, 10)$

b1) $\boxed{P(X \geq 75)} = P\left(Z \geq \dfrac{75-60}{10}\right) = P(Z \geq 1{,}5) = 1 - P(Z < 1{,}5) =$

$= 1 - 0{,}9332 = \boxed{0{,}0668}$ (mirando en la tabla)

b2) $P(X < 75) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

$\boxed{450 \cdot 0{,}9332 = 419{,}94 \simeq 420 \text{ opositores obtuvieron menos de 75 puntos}}$