UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \\ a\sqrt{x} - \dfrac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$. **(1 punto)**

2A. a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. **(1 punto)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & 2y & & & = & a^2 \\ -x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & - & ay & - & z & = & -(4+a) \end{array}\right\}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$. **(1 punto)**

4A. Dados los puntos $A(1, 2, 0), B(0, -1, 2), C(2, -1, 3)$ y $D(1, 0, 1)$:
a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. **(1,25 puntos)**
b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. **(1,25 puntos)**

5A. a) Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) No salga defectuoso. **(0,75 puntos)**
a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. **(0,5 puntos)**

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:
b1) Tres chicas. **(0,75 puntos)**
b2) Al menos tres chicos. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	**0**	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Junio 2019

Cipri

Propuesta A

(1A) a) $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+2 & x \leq 1 \\ a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2} & x > 1 \end{cases}$

Para que f sea derivable en $\mathbb{R}$, tiene que ser continua en $\mathbb{R}$.

Continuidad

- Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser funciones elementales bien definidas.
- Continuidad en $x=1$: ¿$\exists \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$?

$$\lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} (ax^2+bx+2) = a+b+2 \\ \lim_{x\to 1^+} \left(a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2}\right) = a-b \end{cases} \quad a+b+2 = a-b \Rightarrow b=-1$$

(para que f sea continua en $x=1$)

Derivabilidad

- Cada una de las funciones componentes es derivable en su dominio por ser funciones elementales derivables.
- Derivabilidad en $x=1$: ¿$\exists f'(1)$?

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax+b & x \leq 1 \longrightarrow f'(1^-) = 2a+b \\ \frac{a}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3} & x > 1 \longrightarrow f'(1^+) = \frac{a}{2} - 2 \end{cases} \Rightarrow 2a+b = \frac{a}{2} - 2$$

(para que $\exists f'(1)$)

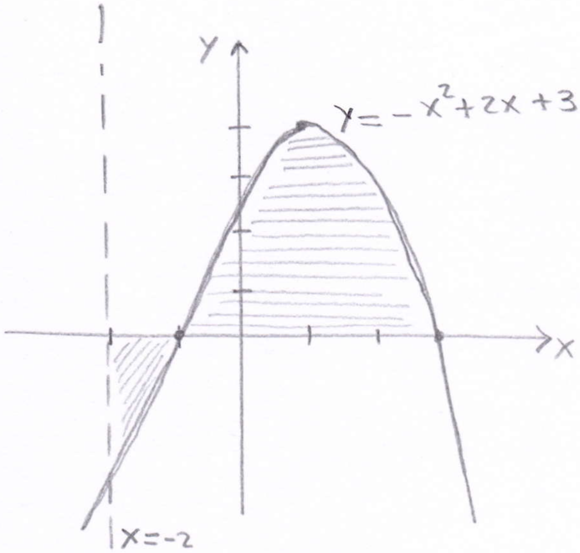
$\Rightarrow a = -2/3$

Conclusión: para $(a,b) = \left(-\frac{2}{3}, -1\right)$, la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^2 - 4$ en $[-3,3]$

f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ (por ser una función polinómica), luego es continua en $[-3,3]$ y derivable en $(-3,3)$. Además, $f(-3) = 5 = f(3)$, luego f verifica las hipótesis del teorema de Rolle.

2A a)



$g(x)=-x^2+2x+3$

Vértice: $x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2\cdot(-1)}=1$, $y_v=4$ $\Big\}\ V(1,4)$

Puntos de corte con OX

$g(x)=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{-2}=\begin{cases}-1\\3\end{cases}$

$$A=\left|\int_{-2}^{-1}(-x^2+2x+3)dx\right|+\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=\left|-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\Big]_{-2}^{-1}\right|+$$

$$+\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\Big]_{-1}^{3}\right)=\frac{7}{3}+\frac{32}{3}=\frac{39}{3}=\boxed{13\ u^2}$$

b) Recta normal a $g(x)$ en $x=4$

$g(x)=-x^2+2x+3$
$g'(x)=-2x+2$
$g'(4)=-6$, $g(4)=-5$

$y-g(4)=-\frac{1}{g'(4)}(x-4)$

$$\boxed{y+5=\frac{1}{6}(x-4)}$$

3A a) $A=\begin{pmatrix}a&2&0\\-1&1&1\\1&-a&-1\end{pmatrix}$, $A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}a&2&0&a^2\\-1&1&1&5\\1&-a&-1&-(4+a)\end{array}\right)$

$|A|=-a+2-(-a^2+2)=a^2-a$

$|A|=0 \Leftrightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a=\begin{cases}0\\1\end{cases}$

Para $\boxed{a=0}$: $\begin{vmatrix}2&0&0\\1&1&5\\0&-1&-4\end{vmatrix}=-8-(-10)\neq 0 \Rightarrow Rg(A)=2\neq 3=Rg(A^*)\Rightarrow$ S.I.

Para $\boxed{a=1}$: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\-1&1&1&5\\1&-1&-1&-5\end{array}\right)\xrightarrow[-F_1+F_3]{F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&3&1&6\\0&-3&-1&-6\end{array}\right)\xrightarrow{F_2+F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&3&1&6\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$\Rightarrow rg(A^*)=2 \Rightarrow Rg(A)=2=Rg(A^*)<3=$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I.

b) $\boxed{a=1}$ Hacemos $z=\lambda$:

$x+2y=1$
$-x+y+\lambda=5$
$3y+\lambda=6 \Rightarrow y=\frac{6-\lambda}{3}$

Como $x=1-2y=1-\frac{12-2\lambda}{3}=\frac{-9+2\lambda}{3}$

Cipri

Soluciones: $\boxed{(x,y,z)=\left(\frac{-9+2\lambda}{3},\ \frac{6-\lambda}{3},\ \lambda\right) \text{ con } \lambda\in\mathbb{R}}$

4A a) $A(1,2,0),\ B(0,-1,2),\ C(2,-1,3),\ D(1,0,1)$

$$\pi \equiv \begin{cases} A \\ \vec{u}_r = \text{recta que pasa por } A \text{ y por } B \longrightarrow \vec{u}_r=\overrightarrow{AB}=(-1,-3,2) \\ \vec{u}_s = (\text{recta que pasa por } C \text{ y por } D)\parallel\pi \longrightarrow \vec{u}_s=\overrightarrow{CD}=(-1,1,-2) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y-2 & -3 & 1 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 6(x-1)-2(y-2)-z-(3z+2(x-1)+2(y-2))=0$$

$$6x-6-2y+4-z-3z-2x+2-2y+4=0$$

$$4x-4y-4z+4=0$$

$$\boxed{\pi\equiv x-y-z+1=0}$$

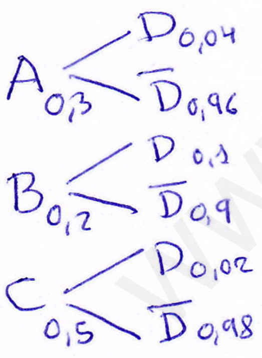
b) $\boxed{V_{\text{Tetraedro}}=\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{4}{6}=\frac{2}{3}u^3}$ donde $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-1,-3,2) \\ \overrightarrow{AC}=(1,-3,3) \\ \overrightarrow{AD}=(0,-2,1) \end{cases}$

5A a) A = tractor producido por la fábrica A

B = " " " " " B

C = " " " " " C

D = tractor defectuoso



a_1) $\boxed{P(\overline{D})}=P(A)P(\overline{D}/A)+P(B)P(\overline{D}/B)+P(C)P(\overline{D}/C)=$

$=0,3\cdot 0,96+0,2\cdot 0,9+0,5\cdot 0,98=\boxed{0,958}$

a_2) $\boxed{P(\overline{C}/D)=1-P(C/D)}$

$$P(C/D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{0,5\cdot 0,02}{1-0,958}=0,238$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\overline{C}/D)=1-0,238=0,762}$$

b) X = el estudiante chico sale a la pizarra, $X\sim B(5,\frac{4}{20})=B(5,\ 0,2)$

b_1) $\boxed{P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot 0,2^2\cdot 0,8^3=0,2048}$ (mirando en la tabla)

(si las 3 son chicas, es porque han salido 2 chicos)

b_2) $\boxed{P(X\geq 3)}=P(X=3)+P(X=4)=0,0512+0,0064=\boxed{0,0576}$

solo hay 4 chicos

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$ **(1,25 puntos por límite)**

2B. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ con $x\in\mathbb{R}$.
a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A\cdot X-2B=C$. **(1,5 puntos)**

4B. Sean la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, el punto $P(3,1,-1)$ y el plano $\pi\equiv 2x+y-z=0$.
a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. **(1,25 puntos)**
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. **(1,25 puntos)**

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:
a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**
a2) Se active solo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10,2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:
b1) Entre 6,5 y 13 horas. **(0,75 puntos)**
b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

a	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Junio 2019

Cipri

Propuesta B

1B a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} = [1^\infty] = \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{2e^{x-1}}{x+1}-1\right)^{x/x-1} =$

$= \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{2e^{x-1}-x-1}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{\frac{x+1}{2e^{x-1}-x-1}}\right)^{\frac{x+1}{2e^{x-1}-x-1}\cdot\frac{2e^{x-1}-x-1}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1}} =$

$= e^{\lim_{x\to 1}\frac{x(2e^{x-1}-x-1)}{x^2-1}} \underset{[\text{L'Hôpital}]}{=}$

$= e^{\lim_{x\to 1}\frac{(2e^{x-1}-x-1)+x(2e^{x-1}-1)}{2x}} = e^{1/2} = \boxed{\sqrt{e}}$

b) $\lim_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{[\text{L'Hôpital}]}{=} \lim_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}\cdot 2x-1}{2x+4} = \frac{-1\cdot(-2)-1}{-2+4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

2B $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $g(x)=\frac{x^2}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

a) $f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2} \rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

$f''(x)=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

$\Rightarrow f''(0)=\frac{-2}{1}\neq 0$

$f(0)=1$

Las coordenadas del extremo relativo de $f(x)$ son $\boxed{(0,1)}$

$g(x)=\frac{x^2}{2} \longrightarrow g'(x)=x \longrightarrow g'(x)=0 \Rightarrow x=0$

$g''(x)=1 \longrightarrow g''(0)>1$

$\Rightarrow$ (Como $g(0)=0$)

$\Rightarrow$ las coordenadas del extremo relativo de $\boxed{g(x) \text{ son } (0,0)}$

$\boxed{2B}$ b) $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 2 = x^2 + x^4 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x^4+x^2-2=0 \\ z=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2+z-2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{z} \Rightarrow x = \pm 1$

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx \right| = \left| \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{6} \right| \Big]_{-1}^{1} = \left| \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{6} - \right.$$

$$\left. - \left(\operatorname{arctg}(-1) + \frac{1}{6} \right) \right| = \left| 2 \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{3} \right| = \boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \simeq 1{,}24\, u^2}$$

$\boxed{3B}$

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \,,\; A^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}}$$

b) $AX - 2B = C \Rightarrow AX = 2B + C \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(2B+C) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{X = A^{-1}(2B+C)}$

$$\boxed{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ -9 & -12 & -23 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{4B}$ $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$, $P(3,1,-1)$, $\pi \equiv 2x+y-z=0$

a) $\left.\begin{array}{l} \vec{u_r} = (3,1,2) \\ A(1,0,-1) \in r \\ \vec{AP} = (2,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,r) = \frac{|\vec{u} \times \vec{AP}|}{|\vec{u}|} = \frac{|(-2,4,1)|}{\sqrt{9+1+4}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}\, u}$

b) Los planos paralelos a π son de la forma $2x+y-z=k$, e imponiendo que $P(3,1,-1)$ pertenezca al plano, obtenemos k:

$6+1+1=k \Rightarrow k=8$

Para encontrar Q, resolvemos el sistema $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2} \\ 2x+y-z=8 \end{cases} \Rightarrow$ (al final)

$\Rightarrow (x,y,z)=(4,1,1) \Rightarrow Q(4,1,1)$

El punto $P(3,1,-1)$ y el vector $\overrightarrow{PQ}=(-2,0,2)$ determinan la recta pedida:

$$\boxed{\begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=1 \\ z=-1+2\lambda \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R}}$$

5B a) S_i = se activa el sensor i, $i=1,2$

$P(S_1)=0{,}98$, $P(S_2)=0{,}96$

a$_1$) $\boxed{P(S_1\cup S_2)} = P(S_1)+P(S_2)-P(S_1\cap S_2) \underset{\uparrow}{=} 0{,}98+0{,}96-0{,}98\cdot 0{,}96 = \boxed{0{,}9992}$

S_1 y S_2 son indep.

a$_2$) $\boxed{P(\overline{S_1\cap S_2})} = 1-P(S_1\cap S_2) = 1-0{,}9408 = \boxed{0{,}0592}$

b) X = tiempo (en horas) en realizar cierta intervención quirúrgica

$X \sim N(10,2)$

b$_1$) $\boxed{P(6{,}5\leq X\leq 13)} = P\left(\frac{-3{,}5}{2}\leq Z\leq\frac{3}{2}\right) = P\left(Z\leq\frac{3}{2}\right) - \left[1-P\left(Z\leq\frac{3{,}5}{2}\right)\right] = \boxed{0{,}8931}$

b$_2$) $\boxed{P(X<7)} = P\left(Z<-\frac{3}{2}\right) = 1-P\left(Z<\frac{3}{2}\right) = 1-0{,}9332 = \boxed{0{,}0668}$

3B a) Calculamos A^{-1} por Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_1+F_3]{F_1+F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_2+2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2:2]{-F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_3+F_1]{-\frac{1}{2}F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{-F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}}$$

4B b) Resolución del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2} \\ 2x+y-z=8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = y \Longrightarrow x-3y=1 \\ y = \dfrac{z+1}{2} \Longrightarrow 2y-z=1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{-2F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{-7F_2+2F_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [3]: $5z = 5 \Rightarrow z = 1$

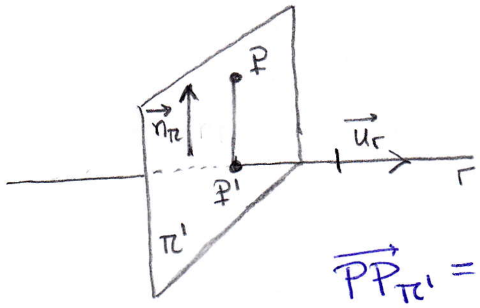
Sustituimos en [2]: $2y - z = 1 \Rightarrow y = \frac{1+1}{2} = 1$

Sustituimos en [1]: $x - 3y = 1$

$$x = 3\cdot 1 + 1 = 4$$

Solución: $(x, y, z) = (4, 1, 1)$

4B a) $d(P,r) = d(P,P')$ donde P' es el punto de corte de r y π' (plano $\perp$ a r t.q. $P \in \pi'$)



Calculamos π'

$\pi' \equiv \{P, \vec{n}_\pi = \vec{u}_r\} \equiv \overrightarrow{PP_{\pi'}} \cdot \vec{u}_r = 0$ donde $P_{\pi'}$ es un punto genérico de π'

$$\overrightarrow{PP_{\pi'}} = (x,y,z) - (3,1,-1) = (x-3, y-1, z+1)$$

$$\overrightarrow{PP_{\pi'}} \cdot \vec{u}_r = 0 \iff (x-3, y-1, z+1)\cdot(3,1,2) = 0 \iff$$
$$\iff 3(x-3) + y - 1 + 2(z+1) = 0 \iff$$
$$\iff \pi' \equiv 3x + y + 2z - 8 = 0$$

Calculamos P'

$$P' \equiv r \cap \pi' \equiv \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2y - z = 1 \\ 3x + y + 2z = 8 \end{cases} \Rightarrow P'\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Calculamos la distancia

$$\boxed{d(P,r) = d(P,P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\ u}$$

$$\overrightarrow{PP'} = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - (3,1,-1) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

1B a) Usando la fórmula

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} = [1^\infty] = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} - 1\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}\left(\frac{2e^{x-1} - x - 1}{x+1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2xe^{x-1} - x^2 - x}{(x-1)(x+1)} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2e^{x-1} + 2xe^{x-1} - 2x - 1}{2x} =$$

regla de L'Hôpital

$$= \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$